



# Contrôle, stabilité et problèmes inverses pour les systèmes à retard et les réseaux : une contribution mathématique et numérique

Julie Valein

## ► To cite this version:

Julie Valein. Contrôle, stabilité et problèmes inverses pour les systèmes à retard et les réseaux : une contribution mathématique et numérique. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lorraine, 2020. tel-03008177

**HAL Id: tel-03008177**

**<https://hal.science/tel-03008177>**

Submitted on 16 Nov 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Résumé de travaux**  
présenté pour obtenir  
**l'Habilitation à Diriger des Recherches**  
en  
**Mathématiques**  
par  
**Julie Valein**

---

**Contrôle, stabilité et problèmes inverses pour les  
systèmes à retard et les réseaux : une contribution  
mathématique et numérique**

---

Date de soutenance : 4 novembre 2020

Jury :

Karine Beauchard	ENS Rennes	Rapporteuse
Assia Benabdallah	Université Aix-Marseille	Rapporteuse
Sylvain Ervedoza	CNRS, Université de Bordeaux	Président
Serge Nicaise	Université Polytechnique des Hauts-de-France	Examineur
Axel Osses	Universidad de Chile	Rapporteur
Karim Ramdani	Inria Nancy Grand-Est	Parrain scientifique
Marius Tucsnak	Université de Bordeaux	Examineur



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>EDP posées sur des réseaux</b>	<b>13</b>
2.1	Stabilité de l'équation des ondes sur un réseau 1-d . . . . .	14
2.2	Stabilité d'une chaîne de poutres et de cordes . . . . .	23
2.3	Contrôle non linéaire d'un système couplé EDP/EDO modélisant un convertisseur de puissance à commutation avec une ligne de transmission . . . . .	28
2.4	Contrôlabilité au bord de l'équation de Korteweg-de Vries sur un réseau en forme d'arbre . . . . .	32
2.5	Estimation de Carleman globale sur un réseau pour l'équation des ondes et application à un problème inverse . . . . .	36
<b>3</b>	<b>EDP avec un terme de retard</b>	<b>39</b>
3.1	Stabilité des équations d'évolution du second ordre avec un feedback non borné avec retard . . . . .	40
3.1.1	Retard indépendant du temps . . . . .	40
3.1.2	Retard dépendant du temps . . . . .	45
3.2	Stabilité de l'équation de Korteweg-de Vries non linéaire avec un retard . . .	51
3.2.1	Cas d'un retard au bord . . . . .	52
3.2.2	Cas d'un retard interne . . . . .	55
3.3	Observateurs pour un modèle linéaire de dynamique de population structurée en âge et avec diffusion spatiale . . . . .	61
3.3.1	Observateur d'état . . . . .	63
3.3.2	Observateur adaptatif . . . . .	73
3.3.3	Quelques questions ouvertes . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Approximations numériques</b>	<b>79</b>
4.1	Observabilité d'équations linéaires paraboliques abstraites discrétisées en temps	80
4.2	Approximations des équations d'évolution du second ordre . . . . .	84
4.3	Approximations numériques d'une classe de problèmes de contrôle optimal en temps . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Conclusion : travaux en cours et perspectives</b>	<b>95</b>
5.1	Un problème inverse sur un réseau pour l'équation de la chaleur . . . . .	95
5.2	EDP avec amortissement échantillonné . . . . .	97
5.3	Un observateur adaptatif . . . . .	98
5.4	Identifiabilité pour l'équation de Korteweg-de Vries . . . . .	100



# Remerciements

Je suis heureuse de profiter de l'occasion qui m'est donnée pour remercier les personnes qui ont joué un rôle dans ma carrière.

Tout d'abord, je souhaite remercier chaleureusement Karine Beauchard, Assia Benabdallah et Axel Osses pour avoir rapporté mon mémoire et pour leurs remarques pertinentes. Un grand merci également à Sylvain Ervedoza pour avoir présidé le jury. Je sais que leur temps est précieux et je leur suis reconnaissante d'avoir étudié de manière approfondie mon manuscrit.

Marius Tucsnak et Karim Ramdani m'ont accueilli avec bienveillance à Nancy il y a maintenant plus de 10 ans. Ils ont toujours été à l'écoute de mes interrogations et je les en remercie. En particulier, merci à Karim pour avoir accepté de devenir mon "parrain scientifique" pour cette HDR.

Serge Nicaise a guidé mes premiers pas dans la recherche, et je suis heureuse qu'il ait pu assister à la soutenance de mon HDR.

J'ai la chance de pouvoir collaborer avec des chercheurs talentueux et échanger avec eux a enrichi mon travail de manière remarquable. Je pense sincèrement que je ne vivrais pas mon travail de recherche de la même manière sans eux. J'espère que nous aurons encore longtemps l'occasion de collaborer. Merci en particulier à : Farah Abdallah, Kaïs Ammari, Lucie Baudouin, Eduardo Cerpa, Emmanuelle Crépeau, Jamal Daafouz, Imene Djebour, Sylvain Ervedoza, Emilia Fridman, Denis Mercier, Serge Nicaise, Cristina Pignotti, Karim Ramdani, Virginie Régnier, Takéo Takahashi, Marius Tucsnak, Jean-Claude Vivalda, Ali Wehbe, Chi-Ting Wu et Enrique Zuazua.

Je souhaite remercier les membres de l'Institut Elie Cartan, en particulier Takéo pour son soutien sans faille, Jean-François pour son amitié, Laurence, Cécile, Didier, Hélène et Valérie pour leur aide précieuse. J'ai la chance d'enseigner à Polytech Nancy et je suis très reconnaissante aux membres de l'école pour leur confiance. Un merci tout particulier aux membres du pôle de maths de Polytech Nancy pour l'ambiance de travail sérieuse et sereine qui y règne : Delphine, El Haj, Jean, Kolehe, Rémi, Renaud, sans oublier Agnès, Lionel et Thomas.

Enfin, j'ai une pensée pour ma famille : Thomas, mes enfants Louise et Arthur, mes parents, Sarah et mes grands-parents. Vivre auprès d'eux me permet d'être épanouie.



# Chapitre 1

## Introduction

Ce manuscrit fait une synthèse des travaux de recherche que j'ai effectués depuis ma thèse en 2008. Ils concernent des problèmes de stabilité et de contrôle, ainsi que des problèmes inverses pour diverses équations aux dérivées partielles (EDP) : équations des ondes, des poutres, de la chaleur, de Korteweg-de Vries, de dynamique de population,... J'ai choisi de les regrouper en trois chapitres. Le premier chapitre s'intéresse à des équations aux dérivées partielles posées sur des réseaux. Dans le deuxième chapitre, j'étudie l'influence de terme de retard dans les équations. Enfin le dernier chapitre traite d'approximations numériques.

J'étudie donc des systèmes physiques ou biologiques, modélisés par des EDP sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle (ou d'une commande). Je cherche des commandes permettant d'amener ces systèmes d'un état initial donné à un état final souhaité. Pour fixer les idées, considérons, de manière formelle, un système du type

$$\dot{Z}(t) = f(Z(t), U(t)), \quad Z(0) = Z_0, \quad (1.1)$$

où  $Z(t) \in H$  est l'état du système à l'instant  $t$  (i.e. l'inconnue du système que nous souhaitons contrôler),  $U(t) \in U$  est le contrôle (ou la commande, i.e. la variable que nous choisissons pour agir sur le système),  $Z_0$  est la donnée initiale et  $f : H \times U \rightarrow H$ , qui décrit en particulier l'équation que doit satisfaire  $Z$  par les lois de la physique et la manière dont le contrôle agit sur le système (sur le bord ou sur une partie du domaine dans lequel l'équation évolue).

La possibilité de trouver un temps  $T > 0$  et un contrôle  $U(t)$  permettant d'amener la solution d'un état initial donné  $Z_0$  à un état final souhaité  $Z_f$  au temps  $T$  est appelé problème de contrôlabilité. On parle de :

- contrôlabilité exacte quand  $Z(T) = Z_f$ ,
- contrôlabilité à zéro quand  $Z(T) = 0$ ,
- contrôlabilité approchée quand  $\|Z(T) - Z_f\| < \epsilon$  pour  $\epsilon$  arbitrairement petit et pour une certaine norme  $\|\cdot\|$  sur  $H$ ,
- contrôlabilité globale quand la contrôlabilité a lieu pour tout  $Z_0$  et  $Z_f$  dans  $H$ ,
- contrôlabilité locale quand  $Z_0$  et  $Z_f$  sont "assez petits" dans  $H$ ,
- contrôlabilité en temps fini quand  $T < +\infty$ ,
- stabilisation (par rétroaction, par feedback ou en boucle fermée) quand  $T = +\infty$  (c'est à dire  $\|Z(t) - Z_f\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ ) et quand on choisit le contrôle  $U$  sous la forme  $U(t) = K(Z(t))$  (relatif au "contrôle en temps réel", très important dans les applications).

On peut aussi s'intéresser à d'autres problèmes : donner une estimation de la vitesse de



convergence dans le cadre de la stabilisation : exponentielle

$$\|Z(t) - Z_f\| \leq Ce^{-\nu t} \|Z(0) - Z_f\|,$$

polynomiale

$$\|Z(t) - Z_f\| \leq \frac{C}{t^\alpha} \|Z(0) - Z_f\|_\alpha,$$

ou autre, trouver un contrôle optimal (en temps optimal par exemple),...

Dans un cadre fonctionnel approprié, le problème de contrôlabilité est le dual de celui de l'observabilité qui consiste à évaluer les solutions au moyen de mesures partielles sur un sous-ensemble du domaine ou du bord. Les liens entre les problèmes de stabilité et de contrôlabilité sont étroits et l'on démontre certaines implications entre ces deux problèmes (voir par exemple [126]). Cependant, la stabilité ne peut pas toujours être obtenue comme conséquence de la contrôlabilité, et c'est pour cela que son étude est souvent faite indépendamment et directement.

Jusqu'à présent nous avons parlé de problème direct, qui permet de déterminer la solution d'un système physique ou biologique à condition que les paramètres (coefficients de l'équation, potentiel, données initiales, données au bord,...) soient connus. La notion de problème inverse consiste en la possibilité de retrouver la valeur d'un paramètre à partir de mesures partielles (localisées, pendant un temps donné, éventuellement répétées) sur la solution du système considéré. Concernant les problèmes inverses des EDP, la principale question est de montrer que le problème est bien posé au sens de Hadamard, c'est à dire qu'il a les propriétés suivantes :

- existence d'une solution,
- unicité de la solution,
- stabilité (la solution dépend continûment des données),

ce qui n'est souvent pas le cas pour les EDP. On peut par ailleurs signaler que du point de vue des techniques utilisées et des problématiques rencontrées autour des EDP, les problèmes inverses possèdent de nombreux points communs avec les questions de contrôlabilité.

Si nous voulons estimer l'état d'un système, ne connaissant pas les données initiales mais seulement une mesure partielle de la solution, il peut être pertinent de construire un observateur. Les observateurs ont été introduits par Luenberger [99] dans le cadre de la dimension finie et sont des systèmes dynamiques auxiliaires qui utilisent comme entrée les mesures disponibles (qui est la sortie du système d'origine) et convergent asymptotiquement (en temps) vers l'état du système d'origine. Nous retrouvons ici la notion de stabilisation.

La première partie de ce manuscrit concerne l'étude de la contrôlabilité ou de la stabilité de systèmes d'EDP posées sur des réseaux. Dans les réseaux, l'état est représenté par plusieurs composantes

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{bmatrix}$$

chaque composante  $z_j$  vit sur une branche  $e_j$  du réseau (et vérifie une EDP sur  $e_j$ ) et les composantes sont couplées entre elles par des conditions au bord ou frontières. Si nous voulons étudier la stabilité du système (1.1) sur un réseau, on va vouloir placer le moins de mécanismes de rétroaction possibles aux sommets du graphe et pouvoir quand même obtenir la stabilité sur toutes les branches du réseau. Plus précisément, si  $p < N$  est le

nombre de feedbacks que l'on a, une des difficultés est que la loi de dissipation est telle que

$$\frac{d}{dt} \|Z(t) - Z_f\|^2 \sim - \sum_{j=1}^p (z_j(t) - z_j^f)^2 \leq 0, \quad \text{où } p < N,$$

c'est à dire que l'on a seulement une maîtrise de  $p$  branches du réseau. Il faut donc faire passer l'information, la dissipation, sur les  $N - p$  branches restantes. Le choix du placement des mécanismes de rétroaction (ou des contrôles) est également un challenge, en fonction de la topologie du réseau par exemple (la présence d'un circuit complique nettement les choses...). De plus les propriétés de contrôlabilité, de stabilité et d'observabilité vont dépendre des longueurs des branches (des phénomènes de résonance peuvent notamment apparaître). Les outils que j'ai employés dans la première partie sont des inégalités d'observabilité fortes ou faibles amenant à divers types de convergence (via des conditions spectrales et des inégalités d'Ingham par exemple), des inégalités de Carleman, des fonctionnelles de Lyapunov, la méthode des multiplicateurs... A chaque fois, une des difficultés est de gérer les termes aux noeuds de transmission.

Dans une seconde partie je vais m'intéresser à des systèmes à retard. Si nous supposons que le mécanisme de rétroaction agit avec un certain retard  $\tau$  (du par exemple à un décalage de mesure ou à un délai de transmission), le système que nous voulons stabiliser s'écrit

$$\dot{Z}(t) = f(Z(t), K(Z(t - \tau)))$$

et la loi de dissipation vérifie généralement une estimée du type

$$\frac{d}{dt} \|Z(t) - Z_f\|^2 \sim - \|Z(t) - Z_f\|^2 + \langle Z(t), Z(t - \tau) \rangle,$$

dont nous ne connaissons pas le signe. De plus, il est bien connu que même un petit retard peut déstabiliser le système. Pour surmonter ces difficultés, j'ai choisi de garder un feedback classique (sans retard) dans le système, qui domine celui avec retard. Une autre idée que j'ai utilisée est que le terme de retard peut être vu comme une (petite) perturbation. Les outils utilisés ici sont également des inégalités d'observabilité amenant à divers types de convergence (avec des conditions spectrales), des fonctionnelles de Lyapunov,...

Dans cette partie, j'ai également étudié des observateurs pour un système de dynamique de population structurée en âge avec diffusion spatiale, où la condition de naissance peut être vue comme un terme à mémoire (proche des problématiques du retard). C'est une condition non locale couplant les individus en âge de se reproduire et les nouveau-nés. En tirant avantage du fait qu'il y a seulement un nombre fini de valeurs propres instables, nous construisons un observateur de Luenberger. Plus précisément, nous stabilisons la partie de dimension finie (instable) sans que cela ne déstabilise la partie de dimension infinie (déjà stable). Nous construisons de plus un observateur adaptatif permettant de retrouver le coefficient de diffusion, la difficulté principale étant que les valeurs propres du système dépendent linéairement de ce coefficient inconnu (mais heureusement pas les vecteurs propres).

Enfin dans la dernière partie, j'aborde les problèmes de stabilité et de contrôlabilité associés à la discrétisation des systèmes. Dans beaucoup d'applications, le système (1.1) est approché par des systèmes de dimension finie. Mais il est maintenant bien connu que si le système continu est exponentiellement ou polynomialement stable, le système discrétisé ne bénéficie pas de cette propriété à cause des modes à hautes fréquences générant des oscillations. Pour la même raison contrôler un système discrétisé ne garantit pas d'obtenir une bonne approximation numérique du contrôle du modèle continu. L'inégalité d'observabilité discrète n'est pas uniforme par rapport au pas de discrétisation. Pour remédier à ces difficultés, dans la dernière partie, j'ai filtré les hautes fréquences des données initiales ou ajouté des viscosités numériques pour certains systèmes, amenant à des inégalités d'observabilité (éventuellement faibles) uniformes par rapport au pas de discrétisation.

La plupart de mes travaux sont le fruit de collaborations stimulantes avec des chercheurs qui seront cités dans le texte. Je donnerais tout au long du manuscrit plusieurs questions qui restent ouvertes directement en lien avec les travaux présentés. Néanmoins dans une dernière partie, je présenterais des travaux en cours et des perspectives qui me semblent intéressants.

# Publications de l'auteur

- [ANVW12] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, *Stability results for the approximation of weakly coupled wave equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 350 (2012), no. 1-2, pp. 29–34.
- [ANVW13] F. Abdallah, S. Nicaise, J. Valein and A. Wehbe, *Uniformly exponentially or polynomially stable approximations for second order evolution equations and some applications*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (2013), no. 3, pp. 844–887.
- [AMRV12] K. Ammari, D. Mercier, V. Régnier and J. Valein, *Spectral analysis and stabilization of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams and strings*, Commun. Pure Appl. Anal., 11 (2012), no. 2, pp. 785–807.
- [BCV11] L. Baudouin, E. Crépeau and J. Valein, *Global Carleman estimate on a network for the wave equation and application to an inverse problem*, Math. Control Relat. Fields, 1 (2011), no. 3, pp. 307–330.
- [BCV19] L. Baudouin, E. Crépeau and J. Valein, *Two approaches for the stabilization of nonlinear KdV equation with boundary time-delay feedback*, IEEE Trans. Automat. Control, 64 (2019), no. 4, pp. 1403–1414.
- [CCV20] E. Cerpa, E. Crépeau and J. Valein, *Boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation on a tree-shaped network*, Evolution Equations & Control Theory, 9 (2020), no. 3, pp. 673–692.
- [DTV12] J. Daafouz, M. Tucsnak and J. Valein, *Well-posedness and stabilization of a class of infinite dimensional bilinear control systems*, IEEE Conference on Decision and Control (CDC'12), Maui (Hawaii), USA (2012), pp. 1560–1565.
- [DTV14] J. Daafouz, M. Tucsnak and J. Valein, *Nonlinear control of a coupled PDE/ODE system modeling a switched power converter with a transmission line*, Systems Control Lett., 70 (2014), pp. 92–99.
- [EV10] S. Ervedoza and J. Valein, *On the observability of abstract time-discrete linear parabolic equations*, Rev. Mat. Complut., 23 (2010), no. 1, pp. 163–190.
- [FNV10] E. Fridman, S. Nicaise and J. Valein, *Stabilization of second order evolution equations with unbounded feedback with time-dependent delay*, SIAM J. Control Optim., 48 (2010), no. 8, pp. 5028–5052.
- [NPV11] S. Nicaise, C. Pignotti and J. Valein, *Exponential stability of the wave equation with boundary time-varying delay*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 4 (2011), no. 3, pp. 693–722.
- [NV07] S. Nicaise and J. Valein, *Stabilization of the wave equation on 1-D networks with a delay term in the nodal feedbacks*, Netw. Heterog. Media, 2 (2007), no. 3, pp. 425–479.
- [NV10a] S. Nicaise and J. Valein, *A remark on the stabilization of the 1-d wave equation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 348 (2010), no. 1-2, pp. 47–51.
- [NV10b] S. Nicaise and J. Valein, *Stabilization of second order evolution equations with unbounded feedback with delay*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 16 (2010), no. 2, pp. 420–456.

- [NV12] S. Nicaise and J. Valein, *Stabilization of non-homogeneous elastic materials with voids*, J. Math. Anal. Appl., 387 (2012), no. 2, pp. 1061–1087.
- [NVF09] S. Nicaise, J. Valein and E. Fridman, *Stability of the heat and of the wave equations with boundary time-varying delays*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 2 (2009), no. 3, pp. 559–581.
- [RTV16] K. Ramdani, M. Tucsnak and J. Valein, *Detectability and state estimation for linear age-structured population diffusion models*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 50 (2016), no. 6, pp. 1731–1761.
- [RVV18] K. Ramdani, J. Valein and J.-C. Vivalda, *Adaptive observer for age-structured population with spatial diffusion*, North-West. Eur. J. Math., 4 (2018), pp. 39–58, i.
- [TVW15] M. Tucsnak, J. Valein and C.-T. Wu, *Numerical approximation of some time optimal control problems*, European Control Conference (ECC), 2015, pp. 1339–1342.
- [TVW19] M. Tucsnak, J. Valein and C.-T. Wu, *Finite dimensional approximations for a class of infinite dimensional time optimal control problems*, Internat. J. Control, 92 (2019), no. 1, pp. 132–144.
- [V20] J. Valein, *On the asymptotic stability of the Korteweg-de Vries equation with time-delayed internal feedback*, accepté dans Math. Control Relat. Fields, special issue on "Stability and control on infinite dimensional systems", 2020.
- [VZ09] J. Valein and E. Zuazua, *Stabilization of the wave equation on 1-D networks*, SIAM J. Control Optim., 48 (2009), no. 4, pp. 2771–2797.

## Chapitre 2

# EDP posées sur des réseaux

Ce chapitre traite de stabilisation, de contrôlabilité et de problèmes inverses pour quelques équations aux dérivées partielles posées sur des réseaux.

Un système d'EDP posé sur un réseau est un type particulier de systèmes couplés dans lequel des équations aux dérivées partielles sont posées sur différents domaines (les branches du réseau) avec des conditions de couplage (de transmission) agissant aux sommets du graphe.

La principale difficulté quand on travaille sur un réseau est que les propriétés de stabilité, de contrôlabilité et d'observabilité vont dépendre de la topologie du réseau (réseau en forme d'étoile, d'arbre, présence de boucles, etc) et des longueurs des branches. Un des challenges va également être de minimiser le nombre de contrôles ou d'amortissements nécessaires pour avoir la contrôlabilité ou la stabilité sur tout le réseau, via les conditions de transmission, même sur les branches où aucun contrôle ou amortissement n'agit.

L'étude des équations aux dérivées partielles sur des structures en forme de réseau ou de graphe a connu de réelles avancées depuis le début des années 80 ([100, 139]), et de nombreux auteurs se sont intéressés aux problèmes de contrôle sur des réseaux unidimensionnels ([54, 89],...). Les applications sont nombreuses : contrôler ou stabiliser les vibrations de structures élastiques (tels que des ponts, des grues,...), réguler la hauteur d'eau dans des réseaux de canaux d'irrigation, contrôler le flux de gaz dans des pipelines à travers des compresseurs, contrôler le trafic routier sur un réseau de routes ou le flux de sang dans un réseau d'artères,...

Considérons donc un réseau unidimensionnel  $\mathcal{R}$  de  $N$  branches  $e_j$  connectées, de longueur  $l_j > 0$ . On note  $\mathcal{E} = \{e_j; 1 \leq j \leq N\}$  l'ensemble des branches et  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{R}$ . Pour un sommet fixé  $v$ , on appelle  $\mathcal{E}_v = \{j \in \{1, \dots, N\}; v \in \bar{e}_j\}$  l'ensemble des branches ayant  $v$  comme extrémité. Si  $\text{card}(\mathcal{E}_v) = 1$ ,  $v$  est un noeud extérieur, tandis que si  $\text{card}(\mathcal{E}_v) \geq 2$ ,  $v$  est un noeud intérieur. On pose  $\mathcal{V}_{ext}$  l'ensemble des noeuds extérieurs et  $\mathcal{V}_{int}$  l'ensemble des noeuds intérieurs. Pour  $v \in \mathcal{V}_{ext}$ , l'unique élément de  $\mathcal{E}_v$  est noté par  $j_v$ . Nous fixons une partition des noeuds extérieurs :  $\mathcal{V}_{ext} = \mathcal{D} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{V}_{ext}^c$ .

Pour une fonction  $u : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose  $u_j = u|_{e_j}$  la restriction de  $u$  à la branche  $e_j$ .

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} L^2(\mathcal{R}) &= \left\{ f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_j \in L^2(0, l_j), \forall j \in \{1, \dots, N\} \right\}, \\ V &= \left\{ f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_j \in H^1(0, l_j), \forall j \in \{1, \dots, N\}; \right. \\ &\quad \left. f_j(v) = f_k(v), \forall j, k \in \mathcal{E}_v, \forall v \in \mathcal{V}_{int}; f_{j_v}(v) = 0, \forall v \in \mathcal{D} \right\}. \end{aligned}$$

Par souci de concision, pour  $f \in L^1(\mathcal{R}) = \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_j \in L^1(0, l_j), \forall j \in \{1, \dots, N\}\}$  on

écrivra

$$\int_{\mathcal{R}} f dx = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} f_j(x) dx.$$

Les produits scalaires et les normes sur les espaces de Hilbert  $L^2(\mathcal{R})$  et  $V$  sont définis par

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2(\mathcal{R})} &= \int_{\mathcal{R}} f(x)g(x)dx & \text{et} & \quad \|f\|_{L^2(\mathcal{R})}^2 = \int_{\mathcal{R}} |f(x)|^2 dx, \\ \langle f, g \rangle_V &= \int_{\mathcal{R}} f_x(x)g_x(x)dx & \text{et} & \quad \|f\|_V^2 = \int_{\mathcal{R}} |f_x(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Je commence, dans une première partie, par rappeler deux résultats obtenus pendant ma thèse pour la stabilité de l'équation des ondes sur un réseau. Puis, j'étudie deux problèmes de stabilité d'une chaîne de poutres et de cordes reliées entre elles. Je considère ensuite le contrôle non linéaire d'un système couplé EDP-EDO modélisant un convertisseur de puissance à commutation avec une ligne de transmission. Je donne après cela un résultat de contrôlabilité au bord de l'équation de Korteweg-de Vries sur un réseau en forme d'arbre. Enfin, j'obtiens une estimation de Carleman globale sur un réseau pour l'équation des ondes, qui sera appliquée à un problème inverse sur ce réseau.

## 2.1 Stabilité de l'équation des ondes sur un réseau 1-d

Cette section fait référence aux articles écrits en collaboration avec Serge Nicaise [109] ([NV07]) et avec Enrique Zuazua [137] ([VZ09]) pendant ma thèse.

Tout d'abord, nous étudions la stabilité de l'équation des ondes sur un réseau unidimensionnel de  $N$  branches  $e_j$  avec un terme de retard dans les feedbacks situés aux noeuds.

Plus précisément, nous considérons sur chaque branche l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l_j, t > 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.1)$$

où  $u_j$  désigne le déplacement le long de la corde  $e_j$  de longueur  $l_j$ . Nous supposons la continuité en tous les noeuds intérieurs, i.e. en tous les sommets de  $\mathcal{V}_{int}$  :

$$u_j(v, t) = u_l(v, t) =: u(v, t), \quad \forall j, l \in \mathcal{E}_v, v \in \mathcal{V}_{int}, t > 0. \quad (2.2)$$

Nous fixons une partition des noeuds extérieurs :

$$\mathcal{V}_{ext} = \mathcal{D} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{V}_{ext}^c,$$

où nous imposons les conditions de Dirichlet aux noeuds de  $\mathcal{D}$

$$u_{j_v}(v, t) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}, t > 0, \quad (2.3)$$

et les conditions de Neumann aux noeuds de  $\mathcal{N}$

$$\frac{\partial u_{j_v}}{\partial n_{j_v}}(v, t) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}, t > 0, \quad (2.4)$$

où  $\partial u_{j_v} / \partial n_{j_v}(v, \cdot)$  désigne la dérivée normale extérieure de  $u_j$  au sommet  $v$ . De plus nous considérons un sous-ensemble  $\mathcal{V}_{int}^c$  de l'ensemble des noeuds intérieurs  $\mathcal{V}_{int}$ . Pour tous les noeuds intérieurs qui ne sont pas dissipés la loi de Kirchhoff est vérifiée :

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_v} \frac{\partial u_j}{\partial n_j}(v, t) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_{int} \setminus \mathcal{V}_{int}^c, t > 0. \quad (2.5)$$

Enfin pour tous les noeuds dissipés, c'est-à-dire pour tous les sommets de

$$\mathcal{V}_c = \mathcal{V}_{int}^c \cup \mathcal{V}_{ext}^c,$$

nous imposons deux types de dissipation, une sans retard et avec un poids  $\alpha_1^{(v)} \geq 0$ , et une avec retard  $\tau_v > 0$  et avec un poids  $\alpha_2^{(v)} \geq 0$  :

$$\sum_{j \in \mathcal{E}_v} \frac{\partial u_j}{\partial n_j}(v, t) = - \left( \alpha_1^{(v)} \frac{\partial u}{\partial t}(v, t) + \alpha_2^{(v)} \frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v) \right), \quad \forall v \in \mathcal{V}_c, t > 0. \quad (2.6)$$

Notons que  $\alpha_1^{(v)}, \alpha_2^{(v)}$  et  $\tau_v$  dépendent du noeud  $v$  dissipé. Enfin les données initiales sont

$$u(t = 0) = u^{(0)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0) = u^{(1)}, \quad (2.7)$$

ainsi que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v) = f_v^0(t - \tau_v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_c, 0 < t < \tau_v, \quad (2.8)$$

à cause du retard dans le système. Je reviendrai sur la difficulté de l'introduction du terme de retard dans le chapitre 3, je vais me concentrer dans ce chapitre sur la problématique des réseaux.

En réécrivant le système (2.1)-(2.8) en un système du premier ordre et en appliquant le théorème de Lumer-Phillips, nous prouvons que ce système est bien posé (c'est-à-dire qu'il admet une solution unique qui dépend continûment des données initiales) sous la condition

$$\alpha_2^{(v)} \leq \alpha_1^{(v)}, \quad \forall v \in \mathcal{V}_c. \quad (2.9)$$

Nous devons restreindre cette hypothèse à

$$\alpha_2^{(v)} < \alpha_1^{(v)}, \quad \forall v \in \mathcal{V}_c \quad (2.10)$$

pour obtenir la décroissance de l'énergie

$$E_u(t) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \left( \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \sum_{v \in \mathcal{V}_c} \frac{\zeta^{(v)}}{2} \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v \rho) \right)^2 d\rho \right),$$

où  $\zeta^{(v)}$  est une constante positive satisfaisant (qui existe par (2.10))

$$\tau_v \alpha_2^{(v)} < \zeta^{(v)} < \tau_v (2\alpha_1^{(v)} - \alpha_2^{(v)}), \quad \forall v \in \mathcal{V}_c. \quad (2.11)$$

En effet, pour des solutions régulières, la dérivée de l'énergie vérifie

$$E'_u(t) \leq -C_1 \sum_{v \in \mathcal{V}_c} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(v, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v) \right)^2 \right)$$

avec

$$C_1 = \min \left\{ \alpha_1^{(v)} - \frac{\zeta^{(v)}}{2\tau_v} - \frac{\alpha_2^{(v)}}{2}, \frac{\zeta^{(v)}}{2\tau_v} - \frac{\alpha_2^{(v)}}{2} \mid \forall v \in \mathcal{V}_c \right\}$$

qui est positive par (2.11).

En utilisant le principe d'invariance de LaSalle (voir par exemple [35]) et sous la condition (2.10), nous donnons alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'énergie tende vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire pour avoir la stabilité forte du système (2.1)-(2.8).



Cette condition est une condition spectrale associée au problème conservatif (c'est-à-dire (2.1)-(2.8) avec  $\alpha_2^{(v)} = \alpha_1^{(v)} = 0$ ). Notons par  $\{\lambda_k^2\}_{k \geq 1}$  l'ensemble des valeurs propres du problème conservatif comptées sans leurs multiplicités, i.e.  $\lambda_k \neq \lambda_l, \forall k \neq l$ , où sans aucune restriction, on peut supposer que  $\lambda_k > 0$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $l_k$  la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_k^2$  (on peut remarquer que  $l_k \leq 2N, \forall k \in \mathbb{N}^*$ ) et soit  $\{\varphi_{k,i}\}_{1 \leq i \leq l_k}$  les vecteurs propres orthonormaux associés à la valeur propre  $\lambda_k^2$ . Dans le cas le plus simple où le gap simple

$$\exists \gamma > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma \quad (2.12)$$

est vérifié et les valeurs propres sont simples (notons alors  $(\varphi_k)_k$  les vecteurs propres du système conservatif associé à la valeur propre  $\lambda_k^2$ ), cette condition nécessaire et suffisante de stabilité forte s'écrit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{v \in \mathcal{V}_c} |\varphi_k(v)|^2 > 0.$$

Dans le cas général, en particulier si les valeurs propres sont multiples ou si le gap généralisé

$$\exists M > 0, \exists \gamma > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_{n+M} - \lambda_n \geq M\gamma > 0 \quad (2.13)$$

est seulement vérifié, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

**Proposition 2.1.1** *Pour toute donnée initiale dans  $H := V \times L^2(\mathcal{R}) \times L^2(0,1)^{V_c}$ , où  $V_c = \text{card}(\mathcal{V}_c)$  est le nombre de sommets avec amortissement, on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

si et seulement si

$$\lambda_{\min}(\mathcal{M}(\lambda_k^2)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (2.14)$$

où  $\lambda_{\min}(\mathcal{M}(\lambda_k^2))$  est la plus petite valeur propre de la matrice  $\mathcal{M}(\lambda_k^2)$  de taille  $l_k \times l_k$  définie par  $\mathcal{M}(\lambda_k^2) := \sum_{v \in \mathcal{V}_c} \mathcal{M}_v(\lambda_k^2)$  avec

$$\mathcal{M}_v(\lambda_k^2) := \begin{pmatrix} \varphi_{k,1}^2(v) & \varphi_{k,1}(v)\varphi_{k,2}(v) & \dots & \varphi_{k,1}(v)\varphi_{k,l_k}(v) \\ \varphi_{k,1}(v)\varphi_{k,2}(v) & \varphi_{k,2}^2(v) & \dots & \varphi_{k,2}(v)\varphi_{k,l_k}(v) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{k,1}(v)\varphi_{k,l_k}(v) & \varphi_{k,2}(v)\varphi_{k,l_k}(v) & \dots & \varphi_{k,l_k}^2(v) \end{pmatrix}.$$

Il est important de noter que pour tout réseau, le gap généralisé (2.13) est vérifié (voir Proposition 6.2 de [54]) avec  $M = N + 1$ , où nous rappelons que  $N$  est ici le nombre de branches du réseau.

Dans le cas où (2.10) n'est pas vérifié, nous avons donné un exemple de réseau où le système est instable en exhibant une suite de retards et une suite de points où il y a dissipation pour lesquelles les solutions du système dissipé ont une énergie constante.

L'étude de la stabilité exponentielle et polynomiale est basée sur l'obtention d'inégalités d'observabilité pour le problème conservatif en développant les solutions en séries de Fourier et en utilisant l'inégalité d'Ingham ([78]), ou l'inégalité d'Ingham généralisé si seulement le gap généralisé (2.13) est vérifié (voir par exemple [17]). Nous donnons une condition nécessaire et suffisante, de type spectral, pour obtenir l'inégalité d'observabilité suivante

$$\|u^{(0)}\|_V^2 + \|u^{(1)}\|_{L^2(\mathcal{R})}^2 \leq C \sum_{v \in \mathcal{V}_c} \int_0^T \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(v, t) \right)^2 dt, \quad (2.15)$$

où  $\phi$  est la solution du système conservatif associé (i.e.  $\phi$  est la solution de (2.1)-(2.8) avec  $\alpha_2^{(v)} = \alpha_1^{(v)} = 0$ ) et  $C, T$  sont des constantes strictement positives. Dans le cas où le gap

simple (2.12) est vérifié et les valeurs propres sont simples, cette condition nécessaire et suffisante est

$$\exists \alpha > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{v \in \mathcal{V}_c} |\varphi_k(v)|^2 \geq \alpha. \quad (2.16)$$

De la même manière la condition spectrale plus faible

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists \alpha > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{v \in \mathcal{V}_c} |\varphi_k(v)|^2 \geq \frac{\alpha}{k^{2m}} \quad (2.17)$$

est équivalente à l'inégalité d'observabilité

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2m}} (a_k^2 \lambda_k^2 + b_k^2) \leq C \sum_{v \in \mathcal{V}_c} \int_0^T \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(v, t) \right)^2 dt, \quad (2.18)$$

où  $u^{(0)} = \sum_{k \geq 1} a_k \varphi_k$ ,  $u^{(1)} = \sum_{k \geq 1} b_k \varphi_k$ ,  $\phi$  est la solution du système conservatif associé,  $C, T$  sont des constantes strictement positives et  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Pour obtenir les résultats de stabilité exponentielle et polynomiale il suffit alors de décomposer la solution comme la somme de la solution du système conservatif et de la solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2}(x, t) = 0 & 0 < x < l_j, \quad t > 0, \forall j \in \{1, \dots, N\}, \\ \psi_j(v, t) = \psi_l(v, t) & \forall j, l \in \mathcal{E}_v, v \in \mathcal{V}_{int}, t > 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{E}_v} \frac{\partial \psi_j}{\partial n_j}(v, t) = -(\alpha_1^{(v)} \frac{\partial u}{\partial t}(v, t) + \alpha_2^{(v)} \frac{\partial u}{\partial t}(v, t - \tau_v)) & \forall v \in \mathcal{V}_c, t > 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{E}_v} \frac{\partial \psi_j}{\partial n_j}(v, t) = 0 & \forall v \in \mathcal{V}_{int} \setminus \mathcal{V}_{int}^c, t > 0, \\ \psi_{j_v}(v, t) = 0 & \forall v \in \mathcal{D}, t > 0, \\ \frac{\partial \psi_{j_v}}{\partial n_{j_v}}(v, t) = 0 & \forall v \in \mathcal{N}, t > 0, \\ \psi(t = 0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial t}(t = 0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

et, suivant Ammari et Tucsnak [10], de démontrer un résultat de régularité de la trace pour ce système. Ce résultat de régularité pour le système (2.19) est assez technique et utilise notamment des constructions locales.

Ainsi la décroissance exponentielle

$$E_u(t) \leq C E_u(0) e^{-\nu t}, \quad t > 0,$$

de l'énergie des solutions de (2.1)-(2.8) provient de l'inégalité d'observabilité (2.15) pour les solutions du système conservatif, et donc de (2.16) dans le cas où le gap simple (2.12) est vérifié et les valeurs propres sont simples.

L'inégalité d'observabilité (2.18) pour les solutions du système conservatif (et donc (2.17) dans le cas où le gap simple (2.12) est vérifié et les valeurs propres sont simples) implique la décroissance polynomiale

$$E_u(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{1/m}} \left\| (u^{(0)}, u^{(1)}, f_v^0(-\tau_v \cdot)) \right\|_{D(A)}^2$$

de l'énergie des solutions de (2.1)-(2.8), en utilisant en plus un lemme d'interpolation et des données initiales plus régulières.

Dans le cas de valeurs propres multiples et si le cas simple (2.12) est vérifié, les conditions de décroissances exponentielle et polynomiale de l'énergie des solutions de (2.1)-(2.8) s'écrivent respectivement

$$\exists \alpha > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_{\min}(\mathcal{M}(\lambda_k^2)) \geq \alpha$$

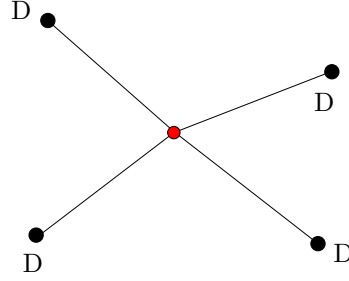


FIGURE 2.1 – Un réseau en forme d'étoile de 4 branches.

et

$$\exists m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha > 0, \quad \lambda_{\min}(\mathcal{M}(\lambda_k^2)) \geq \frac{\alpha}{k^{2m}}.$$

Nous avons également des conditions similaires dans le cas où seulement le gap généralisé (2.13) est vérifié.

Tous ces résultats sont illustrés d'exemples concrets. Nous remarquons que le type de stabilité dépend des conditions aux bords et des propriétés d'irrationalité des rapports des longueurs des branches du réseau. Pour des réseaux complexes, comportant par exemple des boucles, nous utilisons un résultat de [139, 104] qui donne explicitement le spectre de l'opérateur de Laplace via des propriétés algébriques du réseau dans le cas où les branches sont de mêmes longueurs. Je vais donner maintenant simplement trois exemples concrets.

1er exemple : Tout d'abord, considérons un réseau en forme d'étoile avec les conditions de Dirichlet à toutes les extrémité et avec un amortissement au noeud central (voir Fig. 2.1). Si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j, \quad \frac{l_i}{l_j} \notin \mathbb{Q}, \quad (2.20)$$

alors l'énergie du système (2.1)-(2.8) tend vers 0 pour toute donnée initiale dans  $H$ .

2ème exemple : Considérons maintenant l'arbre décrit par la Figure 2.2, où les longueurs des branches sont toutes égales à 1. Si des amortissements sont placés aux sommets  $v_5$ ,  $v_6$  et  $v_7$ , alors l'énergie du système (2.1)-(2.8) tend exponentiellement vers 0 dans l'espace d'énergie.

3ème exemple : Considérons enfin le réseau comportant une boucle décrit par la Figure 2.3, où les longueurs des branches valent 1. Si un amortissement est placé en  $\xi_1 \in \mathcal{S}$  sur l'arête  $e_2$ , en  $\xi_2 \in \mathcal{S}$  sur l'arête  $e_3$ , en  $\xi_3 \in \mathcal{S}$  sur l'arête  $e_4$  et au sommet  $v_6$  ou  $v_7$ , alors pour toute donnée initiale régulière, l'énergie du système (2.1)-(2.8) décroît polynomialement en  $\frac{1}{t}$ . Ici  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des nombres réels  $\rho$  tels que  $\rho \notin \mathbb{Q}$  et si  $[0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  est le développement de  $\rho$  en fraction continue, alors la suite  $(a_n)$  est borné. Il est bien connu que  $\mathcal{S}$  n'est pas dénombrable et que sa mesure de Lebesgue est nulle. Plus précisément, l'ensemble  $\mathcal{S}$  contient tous les nombres irrationnels qui sont mal approchés par les rationnels. En particulier, par le théorème d'Euler-Lagrange,  $\mathcal{S}$  contient tous les nombres quadratiques (i.e. les racines des équations du second degré avec coefficients rationnels).

Dans ce premier travail [109], les conditions suffisantes (et nécessaires) pour obtenir la stabilité sont des conditions spectrales ; elles requièrent le calcul explicite du spectre de

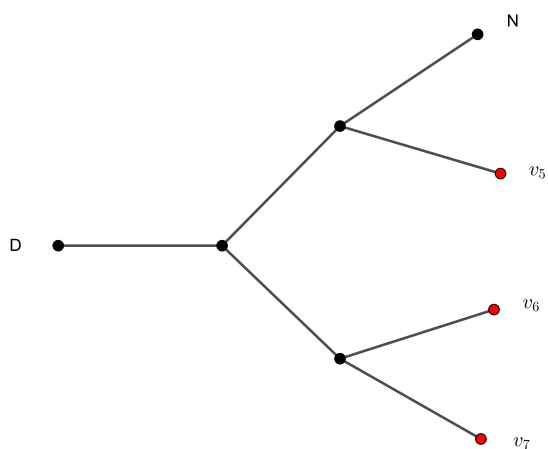


FIGURE 2.2 – Un réseau en forme d'arbre comportant 7 branches.

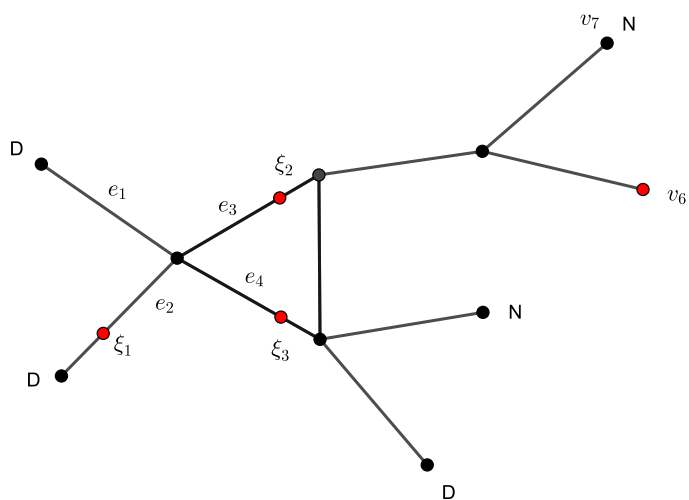


FIGURE 2.3 – Un réseau comportant une boucle.

l'opérateur de Laplace sur le réseau, ce qui n'est pas évident pour des réseaux quelconques. De plus, notre analyse est limitée à des inégalités d'observabilité fortes (amenant à des résultats de décroissance exponentielle ou polynomiale), qui ont lieu pour une classe restreinte de réseau. Nous répondons à ces limites, avec Enrique Zuazua (voir [137]), pour des réseaux arbitraires dans lesquels nous pouvons démontrer des inégalités d'observabilité plus faibles amenant à des taux de décroissance plus lents.

Plus précisément, nous avons étudié, la stabilité de l'équation des ondes sur des réseaux 1-d en ne dissipant qu'en un seul noeud extérieur (que l'on suppose être  $v_1$ ) et nous considérons le même système que dans le premier travail, c'est-à-dire nous considérons (2.1)-(2.7) mais sans retard (i.e.  $\alpha_2^{(v_1)} = 0$  et  $\alpha_1^{(v_1)} = \alpha$ ) et avec

$$\mathcal{N} = \emptyset, \quad \mathcal{V}_c = \{v_1\}, \quad \mathcal{V}_{int}^c = \emptyset.$$

Le but de ce travail est de développer une méthode systématique pour obtenir des taux de décroissance sur des réseaux quelconques et de donner un résultat général permettant de transformer un résultat d'observabilité pour un système conservatif en stabilité pour le système dissipé. Contrairement au travail précédent, nous ne prenons pas pour le système conservatif le système (2.1)-(2.7) avec  $\alpha_1^{(v_1)} = \alpha = 0$  et  $\alpha_2^{(v_1)} = 0$ , mais le système (2.1)-(2.5) avec la condition de Dirichlet au noeud  $v_1$  :

$$\psi_1(0, t) = 0 \tag{2.21}$$

à la place de la condition de Neumann.

L'étude de l'observabilité de ce problème est motivée par les problèmes de contrôle et a déjà été réalisée (voir par exemple [54]).

Le but est donc de montrer le lien entre les résultats d'observabilité existants pour la solution  $\psi$  de (2.1)-(2.5), (2.7) et (2.21) et la stabilité du système dissipé. Plus précisément, notons  $(\tilde{\lambda}_n^2)_{n \geq 1}$  la suite des valeurs propres correspondant au problème (2.1)-(2.5), (2.7) et (2.21), et  $(\varphi_n^D)_{n \geq 1}$  les vecteurs propres correspondants à  $(\tilde{\lambda}_n^2)$  formant une base orthonormale de  $L^2(\mathcal{R})$ . Sous des conditions sur la topologie du réseau et les longueurs des branches, Dager et Zuazua [54] ont prouvé des inégalités d'observabilité à poids pour (2.1)-(2.5), (2.7) et (2.21) de la forme

$$E_*^D(\psi, 0) := \sum_{n \geq 1} c_n^2 (\tilde{\lambda}_n^2 \psi_{0,n}^2 + \psi_{1,n}^2) \leq C \int_0^T \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0, t) \right|^2 dt, \tag{2.22}$$

pour une constante positive  $C$ , où  $\psi_{0,n}$ ,  $\psi_{1,n}$  sont les coefficients de Fourier des données initiales de  $\psi$  dans la base  $(\varphi_n^D)_n$  et avec des poids positifs  $(c_n^2)_{n \geq 1}$  dépendants des propriétés du réseau.

Cette inégalité d'observabilité à poids est prouvée de différentes manières : par la formule de D'Alembert (ce qui évite de calculer le spectre) pour les arbres ou par le développement en séries de Fourier des solutions et le théorème de Beurling-Malliavin pour les réseaux plus complexes, comprenant des boucles par exemple.

La clé de notre travail réside dans le fait que l'on peut obtenir, de manière systématique, l'inégalité d'observabilité à poids pour la solution du problème dissipé directement par (2.22). Ceci nous évite de refaire toute l'analyse (en particulier en théorie des nombres), assez subtile, déjà effectuée sur les poids  $c_n^2$  dans [54].

Pour cela, nous décomposons la solution du système dissipé  $u$  comme la somme de  $w$ , une solution de (2.1)-(2.5) et (2.21) avec donnée initiale appropriée  $(u^{(0)} - u_1^{(0)}(0)\tilde{\varphi}, u^{(1)})$  (où  $\tilde{\varphi}$  est une fonction régulière donnée telle que  $\tilde{\varphi}_1(0) = 1$ ), et d'un reste. Appliquant (2.22) à  $w$ , nous obtenons l'estimée d'observabilité à poids pour  $u$  solution du problème dissipé

$$E_*^D(w, 0) + u_1^{(0)}(0)^2 \leq C_T \int_0^T \left( \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, t) \right)^2 dt, \tag{2.23}$$

où  $E_*^D(w, 0)$  est défini par (2.22), avec des poids  $(c_n^2)_n$  dépendant du réseau. Si les poids  $c_n^2$  sont non nuls pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'énergie du système dissipatif tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ . Néanmoins, en général, les poids tendent vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , la quantité est plus faible que la norme dans l'espace d'énergie et le taux de décroissance n'est pas exponentiel.

Il est important de souligner que (2.23) est vrai sous les mêmes hypothèses sur le réseau que pour (2.22) pour le problème de Dirichlet (2.1)-(2.5) et (2.21). Nous n'avons donc pas besoin d'hypothèse supplémentaire sur le réseau.

Pour obtenir les propriétés de décroissance à partir de (2.23), nous regardons cette inégalité comme une estimée d'observabilité faible dans laquelle l'énergie observée  $E_-(0)$  est égale, grossièrement, à  $E_*^D(w, 0) + u_1^{(0)}(0)^2$ . En pratique nous prenons souvent, si nécessaire, des points situés sur l'enveloppe convexe de  $c_n^2$  au lieu des poids  $c_n^2$  eux-mêmes dans la définition de  $E_*^D$ . L'énergie observée  $E_-$  est plus faible que la norme dans l'espace d'énergie des données initiales qui est nécessaire pour prouver la décroissance exponentielle, et par conséquent nous obtenons des taux de décroissance plus faibles (logarithmique par exemple). Pour obtenir des taux de décroissance explicites à partir de l'inégalité d'observabilité faible nous utilisons une inégalité d'interpolation qui est une variante de celle de Bégout et Soria [27] et une généralisation de l'inégalité d'Hölder. Pour cela nous avons besoin de supposer plus de régularité des données initiales. Pour être plus précis nous considérons les données initiales  $(u^{(0)}, u^{(1)}) \in X_s := [D(\mathcal{A}), V \times L^2(\mathcal{R})]_{1-s}$  pour  $0 < s < 1/2$ , où  $D(\mathcal{A})$  est le domaine de l'opérateur du premier ordre associé à (2.1)-(2.7). Nous obtenons une inégalité d'interpolation de la forme

$$1 \leq \Phi_s \left( \frac{E_-(0)}{CE_u(0)} \right) \frac{\|(u^{(0)}, u^{(1)})\|_{X_s}^2}{C'E_u(0)},$$

où  $\Phi_s$  est une fonction croissante qui dépend de  $s$  et de l'énergie  $E_-$  (et donc des poids  $c_n^2$ ).

L'inégalité d'interpolation précédente entraîne

$$E_-(0) \geq CE_u(0)\Phi_s^{-1} \left( \frac{E_u(0)}{C' \|(u^{(0)}, u^{(1)})\|_{X_s}^2} \right).$$

Avec la dérivée de l'énergie et (2.23), nous obtenons

$$E_u(0) - E_u(T) \geq CE_u(0)\Phi_s^{-1} \left( \frac{E_u(0)}{C' \|(u^{(0)}, u^{(1)})\|_{X_s}^2} \right),$$

ce qui implique, par les propriétés des semi-groupes

$$\forall t > 0, E_u(t) \leq C\Phi_s \left( \frac{1}{t+1} \right) \|(u^{(0)}, u^{(1)})\|_{X_s}^2. \quad (2.24)$$

Evidemment, le taux de décroissance dans (2.24) dépend du comportement de la fonction  $\Phi_s$  près de 0. Donc, dans le but de déterminer le taux de décroissance explicite nous avons besoin d'une description précise de la fonction  $\Phi_s$ , qui dépend de  $s$  et des énergies  $E$  et  $E_-$  et donc, des poids  $(c_n^2)_n$  de (2.23). Ces poids dépendent de la topologie du réseau et des propriétés de théorie des nombres des longueurs des cordes.

Je finis la description de ce travail par deux exemples d'illustration.

1er exemple : Considérons un réseau en forme d'étoile avec un amortissement situé en un noeud extérieur  $v_1$  (voir Figure 2.4). Nous avons alors les résultats suivants :

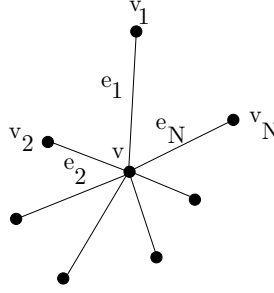
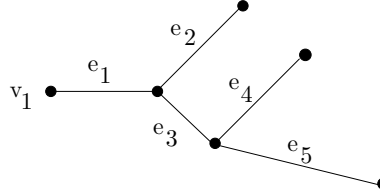
FIGURE 2.4 – Un réseau étoilé de  $N$  branches.

FIGURE 2.5 – Un réseau en forme d'arbre de 5 branches.

- $c_k = \max_{i=2,\dots,N} \prod_{j \neq i} |\sin(\tilde{\lambda}_k l_j)|$ .
- Si  $\forall i, j \geq 2, i \neq j, l_i/l_j \notin \mathbb{Q}$ , alors  $c_k > 0$  et donc on a une décroissance vers 0 de l'énergie;
- Si  $\forall i, j \geq 2, i \neq j, l_i/l_j \in \mathcal{S}$ , alors  $c_k \geq \frac{c}{\tilde{\lambda}_k^{N-2}}$  et donc on a une décroissance polynomiale de l'énergie en  $\frac{1}{(1+t)^{\frac{s}{N-2}}}$  (avec  $\Phi_s(t) = ct^{s/(N-2)}$ );
- Si  $\forall i, j = 2, \dots, N, i \neq j, l_i/l_j$  sont des nombres réels tels que  $|||ql_i/l_j||| \geq \delta e^{-a_{ij}q}, \forall q \in \mathbb{N}$ , alors  $c_k \geq Ce^{-Ak}$  et donc on a une décroissance logarithmique de l'énergie en  $\frac{1}{\ln(C(1+t))^{2s}}$  (avec  $\Phi_s(t) = \left(\frac{A}{\ln(C/t)}\right)^{2s}$ );

Ici  $|||\eta|||$  désigne la distance de  $\eta$  à l'ensemble  $\mathbb{Z}$  :  $|||\eta||| = \min_{\eta-x \in \mathbb{Z}} |x|$ .

2ème exemple : Considérons un réseau en forme d'arbre décrit dans la Figure 2.5 avec  $l_2 = l_4$ . Nous avons alors les résultats suivants :

- $c_k = \max\{|d_5(\tilde{\lambda}_k)|, |d_4(\tilde{\lambda}_k)|, |d_2(\tilde{\lambda}_k)|\}$ , où  $d_5(\lambda) = -\sin(\lambda l_2) \sin(\lambda l_4)$ ,  
 $d_4(\lambda) = -\sin(\lambda l_2) \sin(\lambda l_5)$ ,  
 $d_2(\lambda) = -(\cos(\lambda l_3) \sin(\lambda l_5) \sin(\lambda l_4) + \sin(\lambda l_3) \cos(\lambda l_5) \sin(\lambda l_4) + \sin(\lambda l_3) \sin(\lambda l_5) \cos(\lambda l_4))$ .
- Si  $l_3/l_2, l_5/l_2 \notin \mathbb{Q}$ , alors  $c_k > 0$  et donc on a une décroissance de l'énergie vers 0.
- Si  $l_3/l_2, l_5/l_2, l_3/l_5 \in \mathcal{S}$ , alors  $c_k \geq \frac{c}{\tilde{\lambda}_k^\alpha}$  avec  $\alpha > 4$  et donc on a une décroissance

polynomiale de l'énergie en  $\frac{1}{(1+t)^{\frac{2}{\alpha}}}$  (avec  $\Phi_s(t) = ct^{s/\alpha}$ ).

Cette approche nous permet donc d'obtenir de manière systématique des taux de décroissance pour l'énergie des solutions régulières du système comme une conséquence des propriétés d'observabilité d'un système conservatif.

## 2.2 Stabilité d'une chaîne de poutres et de cordes

Nous avons étudié dans le travail [9] ([AMRV12]) avec Kaïs Ammari (Monastir, Tunisie), Denis Mercier et Virginie Régner (Valenciennes) deux problèmes de stabilisation pour un réseau de cordes et de poutres. Dans cette section, seules les chaînes seront considérées, comme décrit en Figure 2.6.

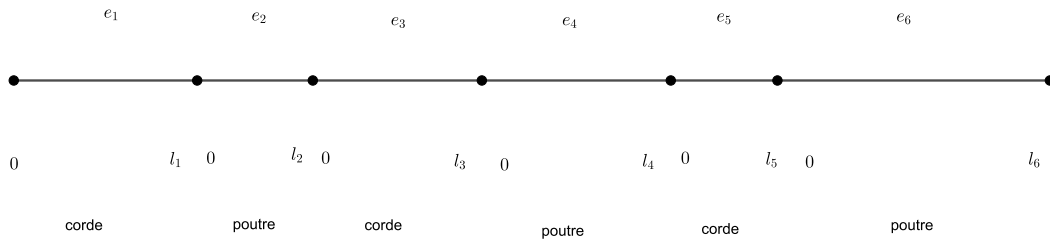


FIGURE 2.6 – Une chaîne de  $2N = 6$  branches.

On étudie un système linéaire modélisant les vibrations d'une chaîne composée alternativement de  $N$  poutres d'Euler-Bernoulli et de  $N$  cordes. Notons que l'étude du système comportant une corde et une poutre couplées a été faite dans [8]. Pour chaque branche  $e_j$  (représentant une corde si  $j$  est impair et une poutre si  $j$  est pair) de la chaîne, la fonction scalaire  $u_j(x, t)$  où  $x \in (0, l_j)$  et  $t > 0$  contient l'information du déplacement vertical de la corde si  $j$  est impair et de la poutre si  $j$  est pair ( $1 \leq j \leq 2N$ ), où  $l_j > 0$  est la longueur de la branche  $e_j$ .

Plus précisément, nous considérons les problèmes d'évolution  $(P_1)$  et  $(P_2)$  décrivant les systèmes de  $2N$  équations suivants :

$$(P_1) \begin{cases} (\partial_t^2 u_{2j-1} - \partial_x^2 u_{2j-1})(t, x) = 0, x \in (0, l_{2j-1}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ (\partial_t^2 u_{2j} + \partial_x^4 u_{2j})(t, x) = 0, x \in (0, l_{2j}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ u_1(t, 0) = 0, u_{2N}(t, l_{2N}) = 0, t \in (0, \infty), \\ \partial_x^2 u_{2j}(t, 0) = \partial_x^2 u_{2j}(t, l_{2j}) = 0, t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ u_j(t, l_j) = u_{j+1}(t, 0), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, 2N-1, \\ \partial_x^3 u_{2j}(t, 0) + \partial_x u_{2j-1}(t, l_{2j-1}) = -\partial_t u_{2j-1}(t, l_{2j-1}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ \partial_x^3 u_{2j}(t, l_{2j}) + \partial_x u_{2j+1}(t, 0) = \partial_t u_{2j}(t, l_{2j}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), \partial_t u_j(0, x) = u_j^1(x), x \in (0, l_j), j = 1, \dots, 2N, \end{cases}$$



et

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} (\partial_t^2 u_{2j-1} - \partial_x^2 u_{2j-1})(t, x) = 0, x \in (0, l_{2j-1}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ (\partial_t^2 u_{2j} + \partial_x^4 u_{2j})(t, x) = 0, x \in (0, l_{2j}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ u_1(t, 0) = 0, u_{2N}(t, l_{2N}) = 0, \partial_x^2 u_{2N}(t, l_{2N}) = 0, t \in (0, \infty), \\ \partial_x^2 u_{2j}(t, 0) = \partial_{\mathbf{t}\mathbf{x}}^2 \mathbf{u}_{2j}(\mathbf{t}, \mathbf{0}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ \partial_x^2 u_{2j}(t, l_{2j}) = -\partial_{\mathbf{t}\mathbf{x}}^2 \mathbf{u}_{2j}(\mathbf{t}, \mathbf{l}_{2j}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N-1, \\ u_j(t, l_j) = u_{j+1}(t, 0), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, 2N-1, \\ \partial_x^3 u_{2j}(t, 0) + \partial_x u_{2j-1}(t, l_{2j-1}) = -\partial_{\mathbf{t}} \mathbf{u}_{2j-1}(\mathbf{t}, \mathbf{l}_{2j-1}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ \partial_x^3 u_{2j}(t, l_{2j}) + \partial_x u_{2j+1}(t, 0) = \partial_{\mathbf{t}} \mathbf{u}_{2j+1}(\mathbf{t}, \mathbf{0}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N-1, \\ u_j(0, x) = u_j^0(x), \partial_t u_j(0, x) = u_j^1(x), x \in (0, l_j), j = 1, \dots, 2N. \end{array} \right.$$

Notre objectif est d'étudier le spectre de l'opérateur conservatif associé et d'en déduire des résultats de stabilité pour  $(P_1)$  et  $(P_2)$ .

Nous définissons l'énergie naturelle  $E(t)$  d'une solution  $u$  de  $(P_1)$  ou  $(P_2)$  par

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \int_0^{l_{2j-1}} (|\partial_t u_{2j-1}(t, x)|^2 + |\partial_x u_{2j-1}(t, x)|^2) dx + \int_0^{l_{2j}} (|\partial_t u_{2j}(t, x)|^2 + |\partial_x^2 u_{2j}(t, x)|^2) dx \right). \quad (2.25)$$

Nous pouvons facilement vérifier que toute solution suffisamment régulière de  $(P_1)$  satisfait la loi de dissipation suivante

$$E'(t) = - \sum_{j=1}^{2N-1} |\partial_t u_j(t, l_j)|^2 \leq 0, \quad (2.26)$$

et par conséquent l'énergie est une fonction décroissante du temps  $t$ .

Le premier résultat montre que le système est bien posé en l'écrivant comme un système du premier ordre. Pour cela, nous avons besoin d'un cadre fonctionnel approprié. On définit l'espace suivant :

$$V = \left\{ u = (u_1, \dots, u_{2N}) \in \prod_{j=1}^N (H^1(0, l_{2j-1}) \times H^2(0, l_{2j})) , \right. \\ \left. u_j(l_j) = u_{j+1}(0), j = 1, \dots, 2N-1, u_1(0) = 0, u_{2N}(l_{2N}) = 0 \right\}.$$

On considère sur  $V$  la forme sesquilinéaire définie par

$$\langle u, \tilde{u} \rangle_V = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^{l_{2j-1}} \partial_x u_{2j-1}(x) \overline{\partial_x \tilde{u}_{2j-1}(x)} dx + \int_0^{l_{2j}} \partial_x^2 u_{2j}(x) \overline{\partial_x^2 \tilde{u}_{2j}(x)} dx \right). \quad (2.27)$$

**Lemme 2.2.1** *Le nombre 0 est une valeur propre associée à  $(P_1)$  et  $(P_2)$  de multiplicité  $N-1$ , i.e. il existe un sous-espace de  $V$  de dimension  $N-1$  tel que tout  $\phi$  dans ce sous-espace vérifie*

$$(EP_0) \left\{ \begin{array}{l} \partial_x^2 \phi_{2j-1}(x) = 0, x \in (0, l_{2j-1}), j = 1, \dots, N, \\ \partial_x^4 \phi_{2j}(x) = 0, x \in (0, l_{2j}), j = 1, \dots, N, \\ \phi_1(0) = 0, \phi_{2N}(l_{2N}) = 0, \\ \partial_x^2 \phi_{2j}(0) = \partial_x^2 \phi_{2j}(l_{2j}) = 0, j = 1, \dots, N, \\ \phi_j(l_j) = \phi_{j+1}(0), j = 1, \dots, 2N-1, \\ \partial_x^3 \phi_{2j}(0) + \partial_x \phi_{2j-1}(l_{2j-1}) = 0, j = 1, \dots, N, \\ \partial_x^3 \phi_{2j}(l_{2j}) + \partial_x \phi_{2j+1}(0) = 0, j = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Il est clair que le système  $(P_1)$  peut s'écrire comme une équation d'évolution du premier ordre

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}_1 U(t), \\ U(0) = (u^0, u^1) = U_0, \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $U$  est le vecteur  $U = (u, \partial_t u)^t$  et l'opérateur  $\mathcal{A}_1 : Y_1 \rightarrow V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j)$  est défini par

$$\mathcal{A}_1(u, v)^t := (v, (\partial_x^2 u_{2j-1}, -\partial_x^4 u_{2j})_{1 \leq j \leq N})^t,$$

avec

$$Y_1 := \left\{ (u, v) \in \left( \prod_{j=1}^N (H^2(0, l_{2j-1}) \times H^4(0, l_{2j})) \right) \cap V \times V \right. \\ \left. \text{satisfaisant (2.29) à (2.32) ci-après} \right\},$$

$$\partial_x^2 u_{2N}(l_{2N}) = 0 \quad (2.29)$$

$$\partial_x^2 u_{2j}(0) = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad \partial_x^2 u_{2j}(l_{2j}) = 0, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (2.30)$$

$$\partial_x^3 u_{2j}(0) + \partial_x u_{2j-1}(l_{2j-1}) = -v_{2j-1}(l_{2j-1}), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.31)$$

$$\partial_x^3 u_{2j}(t, l_{2j}) + \partial_x u_{2j+1}(0) = v_{2j}(l_{2j}), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.32)$$

Il est clair que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  ne définit pas une norme pour  $V$  mais seulement une semi-norme car, pour tout  $u \in V$ , on a  $\langle u, u \rangle_V = 0$  si et seulement si  $u$  satisfait  $(EP_0)$ . Dans le but d'obtenir un cadre Hilbertien approprié on note par  $E_0$  le sous-espace propre de  $\mathcal{A}_1$  associé à la valeur propre 0, i.e.

$$E_0 = \left\{ (\phi, 0) \in V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j) : \phi \text{ satisfait } (EP_0) \right\},$$

et  $P_{0,1} : V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j) \rightarrow E_0$  la projection sur  $E_0$  définie par

$$P_{0,1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - \mathcal{A}_1)^{-1} d\lambda,$$

où  $\gamma$  est une courbe fermée entourant seulement la valeur propre 0 (voir le Théorème III-6.17 de [84]). On peut facilement vérifier que  $E_0 = P_{0,1}(V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j))$ , car on ne peut pas trouver  $(u, v)^t \in \text{Ker}(\mathcal{A}_1^2) \setminus \text{Ker}(\mathcal{A}_1)$ . Soit maintenant  $\mathcal{H}_1$  l'espace de Hilbert défini par

$$V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j) = E_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad (2.33)$$

où  $\mathcal{H}_1 = (I - P_{0,1})(V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j))$ . Alors  $P_{0,1}$  est la projection sur  $E_0$  parallèlement à  $\mathcal{H}_1$ . Notons que, si  $N = 1$ ,  $\mathcal{H}_1 = V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j)$  et seulement dans ce cas.

De plus  $\mathcal{H}_1$  est un espace de Hilbert, équipé du produit scalaire usuel

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_1} = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^{l_{2j-1}} (v_{2j-1}(x) \overline{\tilde{v}_{2j-1}(x)} + \partial_x u_{2j-1}(x) \overline{\partial_x \tilde{u}_{2j-1}(x)}) dx \right. \\ \left. + \int_0^{l_{2j}} (v_{2j}(x) \overline{\tilde{v}_{2j}(x)} + \partial_x^2 u_{2j}(x) \overline{\partial_x^2 \tilde{u}_{2j}(x)}) dx \right).$$

On considère l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  restreint à l'espace  $\mathcal{H}_1 \cap Y_1$  à valeurs dans  $\mathcal{H}_1$ , ce qui a un sens car  $\mathcal{A}_1$  commute avec  $P_{0,1}$ . Par abus de notation, cet opérateur sera toujours noté par  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$  sera son domaine, i.e.  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) := \mathcal{H}_1 \cap Y_1$ . Par conséquent  $\mathcal{A}_1 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathcal{H}_1$ . De plus la norme sur  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$  est définie par

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)}^2 = \|\mathcal{A}_1(u, v)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|(u, v)\|_{\mathcal{H}_1}^2. \quad (2.34)$$

Notons que, avec ces notations, le problème  $(P_1)$  se réécrit sous la forme abstraite : trouver  $(u, v)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$  tel que  $(u, v)_t^t = \mathcal{A}_1(u, v)^t$ .

On montre alors que le problème  $(P_1)$  est bien posé, en utilisant le théorème de Lumer-Phillips, pour toute donnée initiale dans  $V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j)$ . La même étude peut être faite pour le problème  $(P_2)$ .

On étudie ensuite le spectre du système conservatif

$$(P_c) \begin{cases} (\partial_t^2 \Phi_{2j-1} - \partial_x^2 \Phi_{2j-1})(t, x) = 0, x \in (0, l_{2j-1}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ (\partial_t^2 \Phi_{2j} + \partial_x^4 \Phi_{2j})(t, x) = 0, x \in (0, l_{2j}), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ \Phi_1(t, 0) = 0, \Phi_{2N}(t, l_{2N}) = 0, t \in (0, \infty) \\ \partial_x^2 \Phi_{2j}(t, 0) = \partial_x^2 \Phi_{2j}(t, l_{2j}) = 0, t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ \Phi_j(t, l_j) = \Phi_{j+1}(t, 0), t \in (0, \infty), j = 1, \dots, 2N-1, \\ \partial_x^3 \Phi_{2j}(t, 0) + \partial_x \Phi_{2j-1}(t, l_{2j-1}) = 0, t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ \partial_x^3 \Phi_{2j}(t, l_{2j}) + \partial_x \Phi_{2j+1}(t, 0) = 0, t \in (0, \infty), j = 1, \dots, N, \\ \Phi_j(0, x) = u_j^0(x), \partial_t \Phi_j(0, x) = u_j^1(x), x \in (0, l_j), j = 1, \dots, 2N, \end{cases}$$

où nous avons remplacé les conditions dissipatives (en caractère gras dans les systèmes  $(P_1)$  et  $(P_2)$ ) par les conditions conservatives associées. Nous pouvons réécrire le problème aux valeurs propres associé en utilisant la méthode des matrices extérieures de Paulsen [112], c'est à dire par des matrices de transfert, qui sont des matrices carrées d'ordre 2. Ceci nous permet d'obtenir l'équation caractéristique, ainsi que le comportement asymptotique des valeurs propres : les valeurs propres ont les  $2N$  familles de comportement asymptotique possibles suivantes :

$$\left( - \left( \frac{k\pi}{l_{2j-1}} \right)^2 \right)_{k \in \mathbb{N}^*}, j = 1, \dots, N, \quad \left( - \left( \frac{\pi + 2k\pi}{2l_{2j}} \right)^4 \right)_{k \in \mathbb{N}^*}, j = 1, \dots, N-1, \\ \text{et} \quad \left( - \left( \frac{\pi/4 + k\pi}{l_{2N}} \right)^4 \right)_{k \in \mathbb{N}^*}.$$

Nous en déduisons également que les valeurs propres non nulles sont simples et que le gap généralisé est vérifié : si on note  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, alors

$$\exists \gamma > 0, \forall n \geq 1, \quad |\lambda_{n+2N} - \lambda_n| \geq \gamma. \quad (2.35)$$

Contrairement à [8] (cas  $N = 1$ ), il semble que la condition de gap simple n'est pas vérifiée en général (pour tout  $N \geq 2$ ), et nous n'avons pas réussi à obtenir une inégalité d'observabilité (et donc des résultats de stabilité pour  $(P_1)$ ) directement par l'étude du spectre et des vecteurs propres (comme dans la section précédente). Les difficultés sont de localiser précisément le type de valeurs propres dans les paquets.

Cependant, nous prouvons que l'énergie  $E(t)$  des solutions de  $(P_1)$  tend vers zero quand  $t \rightarrow +\infty$  dans l'espace d'énergie approprié, sous des hypothèses d'irrationalités des longueurs des cordes et des poutres.

**Proposition 2.2.1** *Si il existe  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  tel que*

$$\frac{l_{2i-1}}{l_{2j-1}} \notin \mathbb{Q} \quad \text{ou} \quad \frac{l_{2i}}{l_{2j}} \notin \mathbb{Q}, \quad (2.36)$$

ou si il existe  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  tel que

$$\frac{(l_{2i})^2}{l_{2j-1}} \neq \frac{p^2}{q}\pi, \quad \text{où } p, q \in \mathbb{Z}, \quad (2.37)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$$

pour toute solution de  $(P_1)$  avec  $(u^0, u^1)$  dans  $\mathcal{H}_1$ .

Pour cela nous utilisons le résultat de Arendt et Batty [11], en montrant, par l'absurde, que l'opérateur du premier ordre  $\mathcal{A}_1$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. Plus précisément, nous prouvons que l'énergie  $E(t)$  des solutions de  $(P_1)$  tend vers zero si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{2N-1} |\phi_j(l_j)|^2 \neq 0,$$

pour tout vecteur propre  $\phi$  associé à  $(P_c)$ , ce qui est vérifié si (2.36) ou (2.37) est satisfait.

Remarquons que si nous prenons une donnée initiale  $U_0$  dans  $V \times \prod_{j=1}^{2N} L^2(0, l_j)$ , l'énergie de la solution de  $(P_1)$  ne tend pas vers 0, mais vers l'énergie de  $P_{0,1}U_0$  (qui est bien sûr constante).

Comme nous n'avons pas réussi à obtenir le taux de décroissance explicite de l'énergie des solutions de  $(P_1)$ , nous changeons un peu le système, en ajoutant des conditions de dissipation. C'est pourquoi nous introduisons le problème  $(P_2)$ , qui comporte les conditions de dissipation supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u_{2j}(t, 0) &= \partial_{tx}^2 u_{2j}(t, 0), \quad t \in (0, \infty), \quad j = 1, \dots, N, \\ \partial_x^2 u_{2j}(t, l_{2j}) &= -\partial_{tx}^2 u_{2j}(t, l_{2j}), \quad t \in (0, \infty), \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous sommes capables de prouver des résultats de stabilité plus intéressants pour  $(P_2)$  et de donner le taux de décroissance explicite de l'énergie des solutions de  $(P_2)$  dans un espace approprié.

De la même manière que précédemment et avec la même énergie  $E(t)$  (définie par (2.25)), toute solution suffisamment régulière de  $(P_2)$  satisfait la loi de dissipation suivante

$$E'(t) = - \sum_{j=1}^{2N-1} |\partial_t u_j(t, l_j)|^2 - \sum_{j=1}^{N-1} |\partial_{tx}^2 u_{2j}(t, l_{2j})|^2 - \sum_{j=1}^N |\partial_{tx}^2 u_{2j}(t, 0)|^2 \leq 0, \quad (2.38)$$

et par conséquent, l'énergie est une fonction décroissante du temps  $t$ . De plus, nous montrons, de la même manière que pour  $(P_1)$ , que l'énergie  $E(t)$  des solutions de  $(P_2)$  tend vers zero quand  $t \rightarrow +\infty$  dans l'espace d'énergie approprié sans restriction sur les longueurs des cordes et des poutres.

**Proposition 2.2.2** *Pour toute donnée initiale dans  $\mathcal{H}_2$ , la solution de  $(P_2)$  vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0.$$

Le résultat principal de ce travail est le comportement asymptotique précis des solutions de  $(P_2)$ . Comme montré dans [8] dans le cas d'une corde et d'une poutre reliées entre elle (i.e.  $N = 1$ ), nous ne pouvons pas espérer obtenir un taux de décroissance exponentiel des solutions de  $(P_2)$ , mais seulement un taux de décroissance plus faible. Plus précisément nous sommes capables de prouver que le taux de décroissance vers zéro de l'énergie est polynomial en  $1/t^2$ , indépendamment des longueurs des cordes et des poutres et en prenant des données initiales plus régulières dans un espace approprié.

**Théorème 2.2.1** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $(u^0, u^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ , la solution du système  $(P_2)$  satisfait l'estimée suivante*

$$E(t) \leq \frac{C}{t^2} \left\| (u^0, u^1) \right\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)}^2, \quad \forall t > 0.$$

Nous nous sommes basés sur la méthode de domaine fréquentiel de [30] (voir aussi [22, 95] pour une version plus faible) et combinons un argument par l'absurde avec la technique des multiplicateurs pour réaliser une analyse précise de la résolvante. Le résultat de [30] utilisé est le suivant :

**Proposition 2.2.3** *Un  $C_0$  semigroupe  $e^{t\mathcal{L}}$  de contractions sur un espace de Hilbert satisfait*

$$\|e^{t\mathcal{L}}U_0\| \leq C \frac{1}{t^\theta} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{L})}$$

pour une constante  $C > 0$  et pour  $\theta > 0$  si et seulement si

$$\rho(\mathcal{L}) \supset \{i\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}, \quad (2.39)$$

et

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta^\theta} \|(i\beta - \mathcal{L})^{-1}\| < \infty, \quad (2.40)$$

où  $\rho(\mathcal{L})$  est l'ensemble résolvant de l'opérateur  $\mathcal{L}$ .

## 2.3 Contrôle non linéaire d'un système couplé EDP/EDO modélisant un convertisseur de puissance à commutation avec une ligne de transmission

Dans cette section, nous nous intéressons à un type particulier de réseau et faisons référence au papier [53] ([DTV14]), ainsi qu'au papier de conférence [52] ([DTV12]) dans une version préliminaire, écrits en collaboration avec Jamal Daafouz (CRAN, Nancy) et Marius Tucsnak (Nancy puis Bordeaux). Le système des équations aux dérivées partielles et ordinaires que l'on étudie ici est le couplage d'un convertisseur de boost et d'une ligne de transmission, décrit en Figure 2.7. De plus, pour prendre en compte que le contrôle physique ne peut pas se situer en dehors d'un intervalle, nous utilisons une loi de rétroaction saturée.

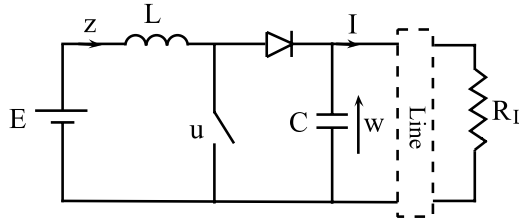


FIGURE 2.7 – Convertisseur de puissance avec une ligne de transmission.

En notant  $z(t)$  le courant et  $w(t)$  la tension, il est bien connu que le convertisseur de boost est décrit par les équations aux dérivées ordinaires (EDO) :

$$\dot{z}(t) = -\frac{\rho(t)}{L}w(t) + \frac{E}{L}, \quad (2.41)$$

$$\dot{w}(t) = \frac{\rho(t)}{C} z(t) - \frac{1}{C} I(0, t), \quad (2.42)$$

où  $I(0, t)$  est le courant du "côté gauche" de la ligne de transmission, la fonction  $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  est l'entrée,  $E > 0$  est une tension constante fournie par l'alimentation,  $L > 0$  est l'inductance et  $C > 0$  est la capacité. Ici et dans la suite, un point ( $\dot{\cdot}$ ) est la dérivée par rapport au temps  $t$ .  $\rho = 0$  correspond à un interrupteur fermé et  $\rho = 1$  ouvert. Le caractère moyennisé de notre modèle (correspondant à une fréquence de commutation très rapide) est exprimé par le fait que le contrôle  $\rho$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  au lieu de l'ensemble discret  $\{0, 1\}$  qui est en général associé à la configuration de commutation. Un tel "modèle moyen" est classique dans la littérature et signifie que le contrôle n'est pas le signal de commutation correspondant à la position de l'interrupteur dans le circuit mais la moyenne du signal de commutation sur un petit intervalle de temps. Typiquement, cet intervalle de temps est la période de commutation.

Le courant  $I$  et la tension  $V$  dans la ligne de transmission satisfont l'équation des télégraphistes

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = -L_l^{-1} \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \quad (x \in (0, 1), t \geq 0), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = -C_l^{-1} \frac{\partial I}{\partial x}(x, t) \quad (x \in (0, 1), t \geq 0), \quad (2.44)$$

$$V(0, t) = w(t), V(1, t) = R_L I(1, t) \quad (t \geq 0). \quad (2.45)$$

Le système étudié dans cette section est formé par les équations (2.41)-(2.45), ainsi que des conditions initiales

$$z(0) = z_0, \quad w(0) = w_0, \quad (2.46)$$

$$I(x, 0) = I_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x) \quad (x \in (0, 1)). \quad (2.47)$$

Ici  $L_l$  et  $C_l$  sont des constantes positives qui caractérisent la ligne de transmission et  $R_L$  est la résistance au bout de la ligne.

Notre résultat principal concerne la conception d'un contrôle par rétroaction pour (2.41)-(2.47), dont le but est d'amener le système à un *état admissible de référence*. Rappelons que les états admissibles de référence sont des solutions de (2.41)-(2.47) indépendantes du temps. Dans notre cas, un état admissible de référence est le quadruplet

$$\begin{bmatrix} z^* \\ w^* \\ I^* \\ V^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^2[0, 1] \times L^2[0, 1],$$

tel que

$$-\frac{\rho^*}{L} w^* + \frac{E}{L} = 0, \quad (2.48)$$

$$\frac{\rho^*}{C} z^* - \frac{1}{C} I^*(0) = 0, \quad (2.49)$$

$$-L_l^{-1} \frac{\partial V^*}{\partial x}(x) = 0 \quad (x \in (0, 1)), \quad (2.50)$$

$$-C_l^{-1} \frac{\partial I^*}{\partial x}(x) = 0 \quad (x \in (0, 1)), \quad (2.51)$$

$$V^*(0) = w^*, V^*(1) = R_L I^*(1), \quad (2.52)$$

pour  $\rho^* \in (0, 1)$ . Il est facile de vérifier que, étant donné  $\rho^* \in (0, 1)$  l'unique solution de (2.48)-(2.52) (donc notre état admissible de référence) est donnée par

$$z^* = \frac{E}{\rho^{*2} R_L}, \quad w^* = \frac{E}{\rho^*}, \quad (2.53)$$

$$I^*(x) = \frac{E}{\rho^* R_L}, \quad V^*(x) = \frac{E}{\rho^*} \quad (x \in (0, 1)). \quad (2.54)$$

Le problème de contrôle que l'on considère consiste, étant donné  $\rho^* \in (0, 1)$ , à trouver une loi de feedback pour le contrôle  $\rho$  dans le but d'avoir (dans un sens approprié)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \\ I(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^* \\ w^* \\ I^* \\ V^* \end{bmatrix}.$$

Pour construire cette loi de feedback, on utilise un simple calcul, supposant que (2.41)-(2.47) admet des solutions régulières. Considérons alors la fonction "énergie"  $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^2[0, 1] \times L^2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$W \begin{pmatrix} z \\ w \\ I(\cdot) \\ V(\cdot) \end{pmatrix} = L|z - z^*|^2 + C|w - w^*|^2 + L_I \|I(\cdot) - I^*\|_{L^2[0,1]}^2 + C_I \|V(\cdot) - V^*\|_{L^2[0,1]}^2 \quad (z, w \in \mathbb{R}, I, V \in L^2[0, 1]). \quad (2.55)$$

Un simple calcul montre que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{d}{dt} W \begin{pmatrix} z \\ w \\ I(\cdot) \\ V(\cdot) \end{pmatrix} = -2R_L |I(1, t) - I^*|^2 + 2(\rho^* - \rho(t))(w^* z(t) - w(t) z^*). \quad (2.56)$$

A ce stade, la formule (2.56) n'est pas rigoureusement prouvée. Nous remarquons aussi que si il n'y a pas de perturbation agissant sur le système alors on pourrait choisir une constante  $\rho = \rho^*$  qui amène la tension de sortie à l'équilibre désiré  $w^* = \frac{E}{\rho^*}$ , selon (2.53). En effet, pour une constante  $\rho$  le système deviendrait linéaire et stable. Cependant, dans les applications, il y a toujours des perturbations ajoutées à la tension d'entrée  $E$  et au courant  $I$ , et maintenir  $w$  à un état désiré en dépit de ces perturbations est un problème difficile. C'est pourquoi nous proposons un contrôle non linéaire qui garantit que la solution en boucle fermée soit robuste par rapport aux perturbations et aux incertitudes de paramètres. De plus, (2.56) suggère que le contrôle non linéaire choisi accélère la décroissance de  $W$ .

Par (2.56), puisque l'on veut que  $\rho(t) \in [0, 1]$ , un candidat naturel pour la loi de feedback est donné par

$$\rho(t) := \begin{cases} \rho^* + w^* z(t) - z^* w(t) & \text{si } \rho^* + w^* z(t) - z^* w(t) \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } \rho^* + w^* z(t) - z^* w(t) < 0 \\ 1 & \text{si } \rho^* + w^* z(t) - z^* w(t) > 1. \end{cases} \quad (2.57)$$

Avec ce choix de  $\rho$ , (2.56) implique que  $W$  est une fonction de Lyapunov pour (2.41)-(2.47).

Les résultats principaux de [53] concernent le problème en boucle fermée formé par (2.41)-(2.47) et (2.57). C'est donc un problème de stabilité pour le système couplant EDO et EDP avec une dissipation agissant sur un des coefficients dans la partie EDO. Dans le cas de systèmes purement EDPs, nous pouvons référer par exemple à [18, 129].

Notre premier résultat affirme que le système en boucle fermée obtenu en prenant  $\rho$  comme dans (2.57) est bien-posé et satisfait l'estimée d'énergie.

**Théorème 2.3.1** *Pour tout  $z_0, w_0 \in \mathbb{R}$  et  $I_0, V_0 \in L^2[0, 1]$ , il existe une unique solution de (2.41)-(2.47), avec  $\rho$  donné par (2.57). De plus, si  $z^*, w^*, I^*$  et  $V^*$  sont donnés par (2.53) et (2.54) et  $W$  est défini par (2.55), cette solution satisfait, pour  $t \geq 0$ ,*

$$W \begin{pmatrix} z \\ w \\ I(\cdot) \\ V(\cdot) \end{pmatrix} + 2R_L \int_0^t |I(1, \sigma) - I^*|^2 d\sigma - 2 \int_0^t (\rho^* - \rho(\sigma))(w^* z(\sigma) - w(\sigma) z^*) d\sigma = W \begin{pmatrix} z_0 \\ w_0 \\ I_0(\cdot) \\ V_0(\cdot) \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Pour montrer ce théorème, on écrit tout d'abord (2.41)-(2.47) comme un système de contrôle bilinéaire abstrait de la forme

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + \rho(t)PZ(t) + F, \quad (2.59)$$

où  $Z = \begin{bmatrix} z \\ w \\ I \\ V \end{bmatrix}$  est l'état du système et où l'opérateur  $A : D(A) \rightarrow X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L^2[0, 1] \times L^2[0, 1]$

est un opérateur m-dissipatif. Comme (2.59) est un problème non-linéaire, l'existence est non triviale et nécessite plusieurs étapes : l'existence locale en temps de solution forte (en utilisant le fait que  $\mathcal{F} : X \rightarrow X$  défini par  $\mathcal{F}(Z) = \rho(t)PZ$  est Lipschitz sur des sous-ensembles bornés de  $X$ ), puis l'existence locale en temps de solution mild par densité et enfin le fait que  $\|Z\|_X$  n'explose pas en temps fini afin d'obtenir l'existence globale de solution.

Finalement on montre que sous l'action de la loi de rétroaction (2.57) l'état du système converge vers l'état admissible de référence.

**Théorème 2.3.2** *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1, la solution de (2.41)-(2.47), avec  $\rho$  donné par (2.57) et avec  $z_0, w_0 \in \mathbb{R}, I_0, V_0 \in H^1(0, 1)$  avec  $V_0(0) = w_0, V_0(1) = R_L I_0(1)$ , satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = w^*.$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V^* \quad \text{dans } L^2[0, 1].$$

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin d'un résultat de compacité, l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov (qui peut être vue comme une perturbation de (2.55)), ainsi que d'un résultat préliminaire qui consiste à montrer que pour des données initiales suffisamment régulières nous avons convergence forte de  $I$  et de  $V$  vers  $I^*$  et  $V^*$  dans  $L^2(0, 1)$  en raisonnant par l'absurde et en utilisant les caractéristiques.

Le papier de conférences [52] est une version préliminaire, qui est à la fois plus générale (on considère le contrôle bilinéaire d'une classe abstraite de systèmes de dimension infinie), mais avec des résultats partiels (on ne montre que la convergence faible au lieu de la convergence forte décrit ici).

Un problème ouvert qui me semble intéressant est le cas du système à commutation ou à switch associé, c'est à dire en prenant  $\rho \in \{0, 1\}$  dans (2.41)-(2.47). On obtient alors un système hybride au sens où dynamiques discrète et continue sont couplées. Au vu de (2.56), le choix naturel est de prendre

$$\rho(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } w^* z(t) - z^* w(t) < 0 \\ 1 & \text{si } w^* z(t) - z^* w(t) > 0. \end{cases} \quad (2.60)$$



Nous avons obtenu l'existence locale de solution pour l'inclusion différentielle associée, de manière constructive par la définition de type Filippov, ainsi que l'unicité de solution. Mais nous n'avons pas réussi pour le moment à obtenir de résultat de stabilité, même faible, par manque de compacité.

## 2.4 Contrôlabilité au bord de l'équation de Korteweg-de Vries sur un réseau en forme d'arbre

Dans cette section, qui fait référence à l'article récent [40] ([CCV20]), je me suis intéressée avec Eduardo Cerpa (Santiago du Chili) et Emmanuelle Crépeau (Grenoble) à la contrôlabilité de réseaux orientés pour l'équation de Korteweg-de Vries.

En 1834, John Scott Russell observe pour la première fois dans un canal une onde solitaire, appelée aussi soliton, qui se propage sans déformation dans un milieu non linéaire et dispersif. On réfère à l'introduction de [125] pour une description de ce phénomène. En 1895, Diederik Korteweg et Gustav de Vries obtiennent l'équation aux dérivées partielles non linéaire dispersive,  $y_t + y_{xxx} + 6yy_x = 0$ , qui est maintenant connue comme l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) et qui modélise la propagation d'une onde longue dans une eau de relative faible profondeur. Il semble que cette équation a été introduite pour la première fois par Joseph Boussinesq en 1877. Les domaines d'applications de cette équation sont variés : collision d'ondes hydromagnétiques, ondes acoustiques ioniques dans un plasma, ondes acoustiques dans une structure cristalline, ou une partie d'un système cardiovasculaire...

Il y a maintenant, dans la littérature, une bonne compréhension de la contrôlabilité pour une équation de KdV simple. Pour une équation de KdV avec conditions homogènes de Dirichlet et contrôle à droite de type Neumann sur un domaine borné, la longueur  $L$  de l'intervalle où l'équation est posée joue un rôle dans le fait de contrôler ou non la solution de l'équation ([37, 46, 124]). En effet, il est bien connu que si  $L = 2\pi$ , il existe une solution stationnaire ( $y(x, t) = 1 - \cos x$ ) du système linéarisé autour de 0. Plus généralement, en définissant l'ensemble des longueurs critiques

$$\mathcal{N} = \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}, k, l \in \mathbb{N}^* \right\},$$

l'équation linéarisée autour de 0 est exactement contrôlable avec seulement un contrôle de type Neumann à droite si et seulement si  $L \notin \mathcal{N}$  (voir [124]) et l'équation de KdV non linéaire est localement exactement contrôlable (en utilisant un argument de type point fixe) si  $L \notin \mathcal{N}$ . Des résultats supplémentaires montrent que l'équation de KdV non linéaire est en fait localement exactement contrôlable pour toutes longueurs critiques contrairement à l'équation de KdV linéaire (voir [36, 38, 46]). Voir aussi [37] et [125] pour un état de l'art.

Comme nous avons une assez complète compréhension de la contrôlabilité au bord de cette équation, on s'intéresse ici à l'équation de KdV posée sur un réseau. Récemment, il y a eu deux travaux publiés traitant de ce problème. Dans les deux, la topologie considérée est une étoile, avec un noeud central et plusieurs noeuds extérieurs. Ces deux papiers montrent la contrôlabilité exacte locale de l'équation de KdV non linéaire sur un réseau : [7] avec  $N + 1$  contrôles au bord pour  $N$  branches (le résultat principal de ce travail est en fait la stabilisation) et [39] avec  $N$  contrôles au bord pour  $N$  branches.

Les principales différences entre les papiers [7] et [39] et cette section sont les suivantes : le sens de propagation de la vague sur la première branche ; les conditions de transmission au noeud central ; et le fait que l'on améliore les résultats précédents avec un contrôle de moins.

Plus précisément, nous considérons un réseau  $\mathcal{R}$  de type arbre de  $N + 1$  branches  $e_i$  (où  $N \in \mathbb{N}^*$ ), de longueurs  $l_i > 0, i \in \{1, \dots, N + 1\}$ , reliées à un noeud central que l'on suppose

## 2.4. CONTRÔLABILITÉ AU BORD DE L'ÉQUATION DE KORTEWEG-DE VRIES SUR UN RÉSEAU EN FORME D'ARBRE

être 0 pour tous les sommets. On suppose que la première branche  $e_1$  est paramétrée sur l'intervalle  $I_1 := (-l_1, 0)$  et les  $N$  autres  $e_i$  sont paramétrées sur l'intervalle  $I_i := (0, l_i)$  (voir Figure 2.8).

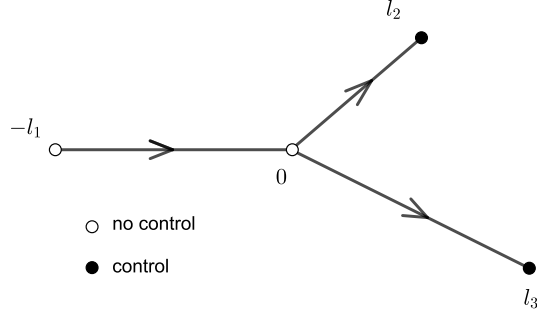


FIGURE 2.8 – Un réseau en forme d'arbre avec 3 branches ( $N = 2$ ).

Sur chaque branche est posée l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) non linéaire. Sur la première branche ( $i = 1$ ) il n'y a pas de contrôle tandis que sur les autres ( $i = 2, \dots, N + 1$ ) on met les contrôles au bord de type Neumann. On écrit donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_{i,t} + y_{i,x} + y_{i,xxx} + y_i y_{i,x})(x, t) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N + 1\}, x \in I_i, t > 0, \\ y_1(-l_1, t) = 0, \quad t > 0, \\ y_i(l_i, t) = 0, \\ y_{i,x}(l_i, t) = h_i(t), \\ y_1(0, t) = \alpha_i y_i(0, t), \end{array} \right\} \quad \forall i \in \{2, \dots, N + 1\}, t > 0, \quad (2.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1,x}(0, t) = \sum_{i=2}^{N+1} \beta_i y_{i,x}(0, t), \quad t > 0, \\ y_{1,xx}(0, t) = \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{\alpha_i} y_{i,xx}(0, t), \quad t > 0, \\ y_i(x, 0) = y_{i0}(x), \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, \dots, N + 1\}, x \in I_i,$$

où  $y_i(x, t)$  est l'amplitude de la vague sur la branche  $e_i$  à la position  $x \in I_i$  au temps  $t > 0$ ,  $h_i = h_i(t)$  est le contrôle sur la branche  $e_i$  ( $i \in \{2, \dots, N + 1\}$ ) appartenant à  $L^2(0, T)$  et  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  ( $i \in \{2, \dots, N + 1\}$ ) sont des constantes strictement positives. Les données initiales  $y_{i0}$  sont supposées être des fonctions dans  $L^2$  en espace.

Les conditions de transmission au noeud central 0 sont inspirées des papiers récents [103] et [34]. Ce n'est pas le seul choix possible, et la principale motivation est de garantir l'unicité de solutions régulières de l'équation de KdV linéarisée autour de 0 (voir [34]).

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$$L^2(\mathcal{R}) = \left\{ f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_i \in L^2(I_i), \forall i \in \{1, \dots, N + 1\} \right\},$$

$$H_0^1(\mathcal{R}) = \left\{ f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_i \in H^1(I_i), \forall i \in \{1, \dots, N + 1\}, \right.$$

$$\left. f_1(-l_1) = f_i(l_i) = 0, f_1(0) = \alpha_i f_i(0), \forall i \in \{2, \dots, N + 1\} \right\}.$$

Par souci de concision, pour  $f \in L^1(\mathcal{R}) = \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_i \in L^1(I_i), \forall i \in \{1, \dots, N+1\}\}$  on écrit

$$\int_{\mathcal{R}} f dx = \int_{-l_1}^0 f_1(x) dx + \sum_{i=2}^{N+1} \int_0^{l_i} f_i(x) dx.$$

Les produits scalaires et les normes sur les espaces de Hilbert  $L^2(\mathcal{R})$  et  $H_0^1(\mathcal{R})$  sont définies par

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathcal{R})}^2 &= \int_{\mathcal{R}} |f(x)|^2 dx & \text{et} & \quad \langle f, g \rangle_{L^2(\mathcal{R})} = \int_{\mathcal{R}} f(x)g(x) dx, \\ \|f\|_{H_0^1(\mathcal{R})}^2 &= \int_{\mathcal{R}} |f_x(x)|^2 dx & \text{et} & \quad \langle f, g \rangle_{H_0^1(\mathcal{R})} = \int_{\mathcal{R}} f_x(x)g_x(x) dx. \end{aligned}$$

Le résultat principal est d'étudier la contrôlabilité de l'équation de KdV non linéaire sur un réseau en forme d'arbre de  $N+1$  branches avec  $N$  contrôles. Le problème de contrôlabilité peut être énoncé ainsi : pour tout  $T > 0$ ,  $l_i > 0$ ,  $y_0 \in L^2(\mathcal{R})$  et  $y_T \in L^2(\mathcal{R})$ , est-il possible de trouver  $N$  contrôles au bord de type Neumann  $h_i \in L^2(0, T)$  tels que la solution  $y$  de (2.61) sur le réseau de type arbre de  $N+1$  branches satisfait  $y(\cdot, 0) = y_0$  et  $y(\cdot, T) = y_T$  ?

La première étape consiste à montrer que le système (2.61) est bien posé. Pour cela, en s'inspirant de [124], on étudie d'abord le système linéaire homogène (sans contrôle) associé, puis l'équation de KdV linéaire sur le réseau avec données initiales et contrôles réguliers, et par densité et la technique des multiplicateurs, avec moins de régularité sur les données. Ensuite, on considère le cas du système linéaire avec un terme source dans le but de passer aux équations de KdV non linéaires par un argument de point fixe.

Le résultat principal de cette section donne une réponse positive à la contrôlabilité exacte si le temps de contrôle est assez grand et les longueurs des branches sont assez petites.

**Théorème 2.4.1** *Soit  $l_i > 0$  satisfaisant*

$$L := \max_{i=1, \dots, N+1} l_i < \sqrt{3}\pi \left( \frac{\min(1, \frac{\alpha_i}{N\beta_i})}{\max(1, \frac{\alpha_i}{N\beta_i})} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 \left( 1 - \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{\alpha_i^2} \right) + 1}} \quad (2.62)$$

*et supposons que*

$$\sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{\alpha_i^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^{N+1} \beta_i^2 = 1. \quad (2.63)$$

*Il existe une constante positive  $T_{\min}$  telle que le système (2.61) est localement exactement contrôlable en tout temps  $T > T_{\min}$ . Plus précisément, il existe  $r > 0$  suffisamment petit tel que pour toute donnée initiale  $y_0 \in L^2(\mathcal{R})$  et  $y_T \in L^2(\mathcal{R})$  avec*

$$\|y_0\|_{L^2(\mathcal{R})} < r \quad \text{et} \quad \|y_T\|_{L^2(\mathcal{R})} < r,$$

*il existe  $N$  contrôles au bord de type Neumann  $h_i \in L^2(0, T)$  tels que la solution  $y$  de (2.61) sur le réseau en forme d'arbre de  $N+1$  branches satisfait  $y(\cdot, 0) = y_0$  et  $y(\cdot, T) = y_T$  pour  $T > T_{\min}$ .*

Il me semble intéressant de faire la remarque suivante : si on a la condition  $\sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{\alpha_i^2} = 1$ , alors (2.62) devient

$$L < \sqrt{3}\pi \left( \frac{\min(1, \frac{\alpha_i}{N\beta_i})}{\max(1, \frac{\alpha_i}{N\beta_i})} \right)^{1/2}.$$

## 2.4. CONTRÔLABILITÉ AU BORD DE L'ÉQUATION DE KORTEWEG-DE VRIES SUR UN RÉSEAU EN FORME D'ARBRE

De plus, si  $\alpha_i = \sqrt{N}$  et  $\beta_i = \frac{1}{\sqrt{N}}$  ((2.63) est alors vérifié), alors on demandera  $L < \sqrt{3}\pi$ , ce qui correspond aux résultats obtenus précédemment (voir [37]).

Afin de prouver le Théorème 2.4.1 nous montrons d'abord un résultat de contrôlabilité exacte pour l'équation de KdV linéarisée autour de 0. Notre preuve est basée sur un principe de dualité, la méthode HUM et une inégalité d'observabilité pour le système linéaire adjoint rétrograde obtenue par la technique des multiplicateurs. On rappelle que l'équation de KdV linéarisée autour de 0 s'écrit ici

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i,t}(x, t) + y_{i,x}(x, t) + y_{i,xxx}(x, t) = 0, \forall i \in \{1, \dots, N+1\}, x \in I_i, t > 0, \\ y_1(-l_1, t) = 0, \quad t > 0, \\ y_i(l_i, t) = 0, \\ y_{i,x}(l_i, t) = h_i(t), \\ y_1(0, t) = \alpha_i y_i(0, t), \end{array} \right\} \quad \forall i \in \{2, \dots, N+1\}, t > 0, \quad (2.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1,x}(0, t) = \sum_{i=2}^{N+1} \beta_i y_{i,x}(0, t), \quad t > 0, \\ y_{1,xx}(0, t) = \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{\alpha_i} y_{i,xx}(0, t), \quad t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \mathcal{R}. \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors le résultat de contrôlabilité exacte locale du système de KdV non linéaire en appliquant un argument de point fixe. L'inconvénient de cette méthode est que nous n'obtenons pas de conditions optimales sur les longueurs  $l_i$  et sur le temps de contrôle  $T_{\min}$ . Cependant, elle nous permet d'obtenir une constante explicite d'observabilité.

Ces résultats peuvent s'étendre à un réseau en forme d'arbre général avec un nombre de contrôles au bord égal au nombre de noeuds extérieurs sans la racine de l'arbre, la difficulté principale étant l'écriture de manière lisible et compréhensible pour les lecteurs. Par contre l'extension à un réseau quelconque (comportant un circuit) reste à faire.

Une question intéressante est de simplifier l'hypothèse (2.62). Nous savons que sur un intervalle de longueur  $L$ , nous avons la contrôlabilité exacte de l'équation de KdV linéaire si et seulement si  $L$  est non critique, c'est à dire si  $L \notin \mathcal{N}$ . La preuve est basée sur une inégalité d'observabilité montrée par l'absurde ([124]). Il paraît donc pertinent de faire ce raisonnement pour l'équation de KdV posée sur un réseau. On pourrait s'attendre à une hypothèse du type "pour tout  $i \in \{1, \dots, N+1\}$ ,  $l_i \notin \mathcal{N}$ ", mais cela reste à démontrer. Dans un deuxième temps, on pourrait alors considérer le cas des longueurs critiques en se basant sur les travaux de [36, 38, 46] et espérer avoir la contrôlabilité locale exacte en travaillant directement avec l'équation non linéaire. L'étude de réseaux simples (par exemple 3 branches dont deux avec des longueurs non critiques et une de longueur  $2\pi$ ) pourrait également être un point d'accroche.

Un problème ouvert est la possibilité ou non de réduire le nombre de contrôles aux noeuds extérieurs et d'avoir un résultat de contrôlabilité. Ce qui est relativement clair est que si on prend zéro pour un des contrôles  $h_i$ , alors nous n'aurons plus la contrôlabilité exacte dans cette branche  $i$ . En effet, il est bien connu que l'équation de KdV simple contrôlée par la gauche (ici, à travers le couplage) est seulement contrôlable à zéro [66]. Pour des systèmes similaires, on peut mentionner les résultats de contrôlabilité de l'équation des ondes sur un réseau où on peut réduire le nombre de contrôles si le rapport des longueurs n'est pas rationnel (voir par exemple [54] ou la Section 2.1).

## 2.5 Estimation de Carleman globale sur un réseau pour l'équation des ondes et application à un problème inverse

Dans cette section, nous considérons un réseau en forme d'étoile  $\mathcal{R}$  de  $N + 1$  branches  $e_j$ , de longueur  $l_j > 0, j \in \{0, \dots, N\}$ , reliées à un sommet que l'on suppose être l'origine 0 de toutes les branches (voir Figure 2.9). Cette section fait référence au papier [24] ([BCV11]) écrit en collaboration avec Lucie Baudouin (Toulouse) et Emmanuelle Crépeau. Pour toute fonction  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on pose

$$[f]_0 = \sum_{j=0}^N f_j(0) \text{ le crochet de transmission au noeud } 0.$$

Plus précisément, on considère sur ce réseau unidimensionnel plan une équation des ondes avec différents potentiels sur chaque corde, c'est à dire le système suivant

$$\begin{cases} u_{j,tt}(x,t) - u_{j,xx}(x,t) + p_j(x)u_j(x,t) = g_j(x,t), & \forall j \in \{0, \dots, N\}, (x,t) \in (0, l_j) \times (0, T), \\ u_j(l_j, t) = h_j(t), & \forall j \in \{0, \dots, N\}, t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x), & x \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (2.65)$$

sous les hypothèses de continuité et la loi de Kirschhoff au noeud 0, données par

$$u_j(0, t) = u_i(0, t) =: u(0, t), \quad \forall i, j \in \{0, \dots, N\}, 0 < t < T, \quad (2.66)$$

$$[u_x(t)]_0 := \sum_{j=0}^N u_{j,x}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2.67)$$

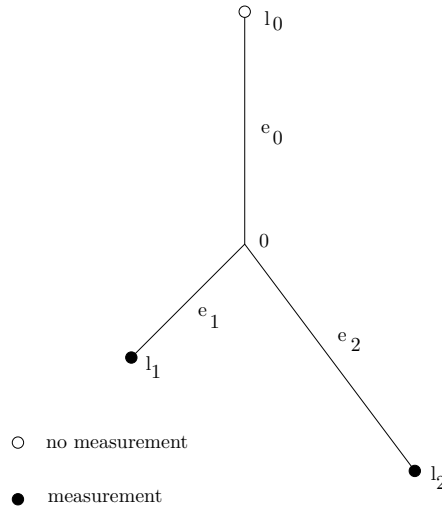


FIGURE 2.9 – Un réseau étoilé de 3 cordes.

Nous utiliserons les notations données dans l'introduction de cette partie.

Tout d'abord, en supposant que  $u^0 \in L^2(\mathcal{R})$ ,  $u^1 \in H^{-1}(\mathcal{R})$ ,  $p \in L^\infty(\mathcal{R})$ ,  $h \in L^2((0, T) \times \mathcal{R})$  et  $g \in L^1(0, T; L^2(\mathcal{R}))$  sont connus, et en supposant la condition de compatibilité  $h_j(0) = u_j^0(l_j)$ , le problème de Cauchy (2.65)-(2.67) est bien posé et on peut prouver que

$$u \in C([0, T], L^2(\mathcal{R})) \cap C^1([0, T], H^{-1}(\mathcal{R})).$$

Ce résultat peut être déduit de [94] par exemple.

Nous nous sommes intéressés ici au problème inverse de la détermination du potentiel  $p$  sur chacune des  $N + 1$  cordes du réseau par seulement  $N$  mesures au bord :  $(u_{j,x}(l_j, \cdot))_{j=1..N}$  sur  $(0, T)$ . Nous prouvons que ce problème est bien posé, en donnant l'estimée de stabilité appropriée. La preuve est principalement basée sur une estimée de Carleman globale pour ce réseau d'équations des ondes.

**Enoncé du problème inverse :** Est il possible de retrouver le potentiel  $p = p(x)$ , pour  $x \in \mathcal{R}$  à partir de  $N$  mesures  $(u_{j,x}(l_j, \cdot))_{j=1..N}$  sur  $(0, T)$  où  $u$  est la solution de (2.65)-(2.67) ?

Nous donnons une réponse locale à cette question. Si on note par  $u[p]$  la solution faible de (2.65)-(2.67), en supposant que  $p \in L^\infty(\mathcal{R})$  est un potentiel donné, on s'intéresse à la stabilité autour de  $p$ . C'est à dire  $p$  et  $u[p]$  sont connus tandis que  $q$  est inconnu et on prouve le résultat de stabilité Lipschitz locale suivant.

Pour énoncer précisément les résultats, on introduit, pour  $m \geq 0$ , l'ensemble

$$L_{\leq m}^\infty(\mathcal{R}) = \left\{ q : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, q_j \in L^\infty(0, l_j), \forall j \in \{0, \dots, N\}, \text{ t.q. } \|q\|_{L^\infty(\mathcal{R})} \leq m \right\}.$$

**Théorème 2.5.1** Soit  $m > 0$  et  $r > 0$ . Supposons que  $p \in L_{\leq m}^\infty(\mathcal{R})$  et que la solution  $u[p]$  de (2.65)-(2.67) satisfait

$$u[p] \in H^1(0, T; L^\infty(\mathcal{R})).$$

Supposons aussi que la donnée initiale  $u^0$  est telle que

$$|u^0(x)| \geq r > 0, \text{ pp dans } \mathcal{R}.$$

Alors pour tout  $q \in L_{\leq m}^\infty(\mathcal{R})$ , et pour tout  $j \in \{0, \dots, N\}$ ,  $u_{j,x}[p](l_j) - u_{j,x}[q](l_j) \in H^1(0, T)$  et il existe une constante  $C = C(T, m) > 0$  telle que  $\forall q \in L_{\leq m}^\infty(\mathcal{R})$  :

$$\sum_{j=1}^N \|u_{j,x}[p](l_j) - u_{j,x}[q](l_j)\|_{H^1(0, T)} \leq C \|u[p]\|_{W^{1,1}(0, T; L^\infty(\mathcal{R}))} \|q - p\|_{L^2(\mathcal{R})}. \quad (2.68)$$

De plus, il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T \geq T_0$ , alors il existe une constante  $C = C(T, r, m, l_0, \dots, l_N) > 0$  telle que  $\forall q \in L_{\leq m}^\infty(\mathcal{R})$  :

$$\|q - p\|_{L^2(\mathcal{R})} \leq C \sum_{j=1}^N \|u_{j,x}[p](l_j) - u_{j,x}[q](l_j)\|_{H^1(0, T)}. \quad (2.69)$$

On peut remarquer que l'on peut garantir  $u[p] \in H^1(0, T; L^\infty(\mathcal{R}))$  pour la solution de (2.65)-(2.67) avec plus de contraintes sur les données  $u^0, u^1, h, g$ . Par exemple,  $u^0 \in \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_j \in H^2(0, l_j), f_j(0) = f_i(0), \forall i, j \in \{0, \dots, N\}, f_j(l_j) = h_j(0), [f_x]_0 = 0\}$ ,  $u^1 \in \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_j \in H^1(0, l_j), f_j(0) = f_i(0), \forall i, j \in \{0, \dots, N\}, f_j(l_j) = h'_j(0)\}$ ,  $h \in H^2(0, T)$  et  $g \in W^{1,1}(0, T; L^2(\mathcal{R}))$ , marchent dans ce cas.

Concernant les problèmes inverses des équations aux dérivées partielles, où la question est de déterminer des paramètre(s) à partir de mesure(s), la principale question est de

montrer que le problème est bien-posé. Cette notion, introduit par Hadamard, est relié à l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution du problème. Pour les EDPs, le problème inverse est souvent mal-posé.

La preuve du Théorème 2.5.1 est ainsi basée sur une inégalité de Carleman unique valable sur la totalité du réseau de cordes, et donc sur des choix de poids appropriés. Nous avons choisi d'utiliser des poids qui ne satisfont pas la loi de Kirchhoff au noeud central, choix qui peut sembler naturel mais qui ne donne pas les estimées souhaitées pour obtenir l'inégalité de Carleman. Nous proposons des poids, inspirés par [28] pour l'équation de la chaleur avec un coefficient discontinu, avec une matrice (que l'on choisit pour être symétrique définie positive) venant de la preuve de l'inégalité de Carleman et gérant les termes au noeud central provenant des intégrations par parties.

On peut étendre ce résultat au cas de réseaux en forme d'arbre avec mesures au bord de type Neumann à tous les noeuds extérieurs sauf un (que l'on suppose être la racine de l'arbre).

Cependant pour des réseaux généraux qui peuvent contenir des circuits fermés, le choix de poids appropriés n'est pas clair et des difficultés apparaissent. Ceci reste un problème ouvert (estimée de Carleman, problème inverse, contrôlabilité exacte,...) pour un réseau général.

Je vais développer dans la dernière partie un autre problème ouvert relatif à ce travail qui me semble intéressant (voir Section 5.1).

## Chapitre 3

# EDP avec un terme de retard

Un axe important de mes recherches est l'introduction de terme de retard dans des équations aux dérivées partielles. Il peut s'agir de retard dans le mécanisme de rétroaction, modélisant le temps de réaction, ou, de manière moins explicite, dans la condition de naissance dans un modèle de dynamique de population structurée en âge, donnant une relation entre les nouveaux-nés et les individus en âge de se reproduire.

Les phénomènes de retard en temps apparaissent dans de nombreuses applications, par exemple en biologie, en mécanique, en automatique ou encore en ingénierie. Les termes de retard sont inévitables en pratique à cause du décalage de mesure, du temps d'analyse, ou du temps de calcul. Une recherche très active s'est développée ces derniers temps sur des problèmes de stabilité d'équations aux dérivées partielles avec retard. Il est bien connu qu'un retard, même petit, dans le mécanisme de rétroaction peut déstabiliser un système (voir par exemple [55, 56]). Mais un terme de retard peut aussi améliorer la performance du système [1]. Les problèmes de stabilité de systèmes avec retard revêtent donc une importance théorique et pratique non négligeable.

Dans une première partie, nous allons étudier l'influence de ce type de retard pour des équations d'évolution abstraites du second ordre avec un retard fixé, puis avec un retard variant au cours du temps. Cette théorie pourra s'appliquer à l'équation des ondes, des poutres ou des plaques, et nous verrons que nous aurons besoin de deux types de feedback : un sans retard et un avec retard, et le poids de celui avec retard ne devra pas être trop grand pour ne pas déstabiliser le système. Les techniques seront différentes selon si le retard dépend ou non du temps : inégalité d'observabilité ou fonctionnelle de Lyapunov.

Ensuite, nous nous intéresserons à l'équation de Korteweg-de Vries, qui modélise la propagation de vagues de faibles amplitudes. Tout d'abord, nous montrerons, contrairement au cas précédent, la robustesse de la stabilité exponentielle par rapport au retard dans le feedback au bord, par deux méthodes : fonctionnelle de Lyapunov et inégalité d'observabilité. Puis nous étudierons le cas du retard interne et nous verrons que le comportement n'est pas le même.

Le retard peut être moins explicite comme dans la condition de naissance pour un problème de dynamique de population structurée en âge avec diffusion spatiale que je développerai enfin. Nous parlons plutôt dans ce cas de systèmes à mémoire, dont les problématiques sont proches de celles à retard. Ne connaissant pas la densité de population initiale, mais seulement la densité de population sur un sous-domaine en espace et en âge, nous construirons tout d'abord un observateur d'état, puis un observateur adaptatif permettant de retrouver à la fois l'état du système et le coefficient de diffusion spatiale.



### 3.1 Stabilité des équations d'évolution du second ordre avec un feedback non borné avec retard

Je propose tout d'abord de considérer un cadre abstrait aussi général que possible qui contient une assez grande classe de problèmes avec des feedbacks avec retard. Plus précisément, nous suivons le cadre abstrait de Ammari et Tucsnak [10] (sans retard). Soit  $H$  un espace de Hilbert réel avec norme et produit scalaire notés respectivement par  $\|\cdot\|_H$  et  $(\cdot, \cdot)_H$ . Soit  $A : D(A) \rightarrow H$  un opérateur auto-adjoint positif avec inverse compact dans  $H$ . Notons par  $V := D(A^{\frac{1}{2}})$  le domaine de  $A^{\frac{1}{2}}$  et par  $D(A^{\frac{1}{2}})'$  l'espace dual de  $D(A^{\frac{1}{2}})$  obtenu avec le produit scalaire de  $H$ .

De plus, pour  $i = 1, 2$ , soit  $U_i$  un espace de Hilbert réel (qui sera identifié à son espace dual) avec norme et produit scalaire notés respectivement par  $\|\cdot\|_{U_i}$  et  $(\cdot, \cdot)_{U_i}$ , et soit  $B_i \in \mathcal{L}(U_i, D(A^{\frac{1}{2}})')$ .

On introduit l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := V \times H \times L^2((0, 1), U_2)$  muni du produit scalaire usuel

$$\left\langle \begin{pmatrix} \omega \\ u \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{u} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \right\rangle = (A^{\frac{1}{2}}\omega, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\omega})_H + (u, \tilde{u})_H + \int_0^1 (z(\rho), \tilde{z}(\rho))_{U_2} d\rho. \quad (3.1)$$

Nous considérons le système décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t - \tau) = 0, & t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \quad \dot{\omega}(0) = \omega_1, \\ u_2(t - \tau) = f^0(t - \tau), & 0 < t < \tau, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $t \in [0, \infty)$  représente le temps,  $\tau \geq 0$  représente le retard,  $\omega : [0, \infty) \rightarrow H$  est l'état du système et  $u_1 \in L^2([0, \infty), U_1)$ ,  $u_2 \in L^2([-\tau, \infty), U_2)$  sont les fonctions d'entrée. La plupart des équations linéaires modélisant les vibrations de structures élastiques peuvent s'écrire sous la forme (3.2), où  $\omega$  est le champ de déplacement.

Dans beaucoup de problèmes, venant en particulier de l'élasticité, les entrées  $u_i$  sont données sous la forme de feedbacks  $u_i(t) = B_i^* \dot{\omega}(t)$ , qui correspondent à des actionneurs et des capteurs mis ensemble. Nous obtenons de cette manière le système en boucle fermée suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) + B_2 B_2^* \dot{\omega}(t - \tau) = 0, & t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \quad \dot{\omega}(0) = \omega_1, \\ B_2^* \dot{\omega}(t - \tau) = f^0(t - \tau), & 0 < t < \tau. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous considérons tout d'abord un retard constant, c'est à dire  $\tau > 0$  est une constante positive et qui correspond au papier [110] ([NV10b]), puis dans un second temps au cas où le retard dépend du temps, c'est à dire  $\tau = \tau(t)$  est une fonction positive du temps et qui correspond aux papiers [64] ([FNV10]), [111] ([NVF09]) dans une version préliminaire (ainsi que pour l'équation de la chaleur), ainsi que [107] ([NPV11]) avec une extension à une version non linéaire.

#### 3.1.1 Retard indépendant du temps

Cette sous-section fait référence à [110] ([NV10b]), écrit en collaboration avec Serge Nicaise pendant mon doctorat.

La première question naturelle à se poser est l'existence et l'unicité des solutions de (3.3) dans le cas d'un retard  $\tau > 0$  constant. Pour cela, nous réécrivons ce système comme un système du premier ordre, en introduisant la variable auxiliaire  $z(\rho, t) = B_2^* \dot{\omega}(t - \tau\rho)$

### 3.1. STABILITÉ DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU SECOND ORDRE AVEC UN FEEDBACK NON BORNÉ AVEC RETARD

pour  $\rho \in (0, 1)$  et  $t > 0$ , suivant une idée de Nicaise et Pignotti [105], maintenant bien développée. Alors  $z$  vérifie l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, & 0 < \rho < 1, t > 0, \\ z(0, t) = B_2^* \dot{\omega}(t), & t > 0, \\ z(\rho, 0) = B_2^* \dot{\omega}(-\tau\rho) = f^0(-\tau\rho), & 0 < \rho < 1. \end{cases}$$

En introduisant

$$U := (\omega, \dot{\omega}, z)^T,$$

$U$  satisfait

$$U' = (\dot{\omega}, \ddot{\omega}, \dot{z})^T = \left( \dot{\omega}, -A\omega(t) - B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) - B_2 z(1, t), -\frac{1}{\tau} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^T.$$

Par conséquent le système (3.3) peut se réécrire comme l'équation d'évolution du premier ordre

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}U(t), & t > 0, \\ U(0) = (\omega_0, \omega_1, f^0(-\tau)), \end{cases} \quad (3.4)$$

où l'opérateur  $\mathcal{A}$  est défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \omega \\ u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\omega - B_1 B_1^* u - B_2 z(1) \\ \frac{1}{\tau} \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{pmatrix},$$

avec domaine

$$D(\mathcal{A}) := \{(\omega, u, z) \in V \times V \times H^1((0, 1), U_2); z(0) = B_2^* u, A\omega + B_1 B_1^* u + B_2 z(1) \in H\}.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Lumer-Phillips, en supposant la condition suivante

$$\exists 0 < \alpha \leq 1, \forall u \in V, \quad \|B_2^* u\|_{U_2}^2 \leq \alpha \|B_1^* u\|_{U_1}^2. \quad (3.5)$$

Cette condition est cohérente avec (2.9) dans le cas de l'équation des ondes sur un réseau en prenant  $B_i^* \varphi = \left( \sqrt{\alpha_i^{(v)}} \varphi(v) \right)_{v \in \mathcal{V}_c}$  pour  $\varphi \in D(A^{1/2})$ . Nous obtenons alors le résultat suivant :

**Proposition 3.1.1** *Sous l'hypothèse (3.5), pour une donnée initiale  $U_0 \in \mathcal{H}$ , il existe une unique solution  $U \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$  au système (3.4). De plus, si  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , alors*

$$U \in C([0, +\infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

Comme dans la section 2.1, nous devons restreindre notre hypothèse à

$$\exists 0 < \alpha < 1, \forall u \in V, \quad \|B_2^* u\|_{U_2}^2 \leq \alpha \|B_1^* u\|_{U_1}^2, \quad (3.6)$$

pour obtenir la décroissance stricte de l'énergie

$$E(t) := \frac{1}{2} \left( \|A^{\frac{1}{2}} \omega\|_H^2 + \|\dot{\omega}\|_H^2 + \tau \xi \int_0^1 \|B_2^* \dot{\omega}(t - \tau\rho)\|_{U_2}^2 d\rho \right), \quad (3.7)$$

où  $\xi$  est une constante positive satisfaisant

$$1 < \xi < \frac{2}{\alpha} - 1, \quad (3.8)$$

qui existe puisque  $0 < \alpha < 1$ . En effet, pour des solutions régulières, la dérivée de l'énergie vérifie

$$E'(t) = -\|B_1^* \dot{\omega}\|_{U_1}^2 - (B_2^* \dot{\omega}, B_2^* \dot{\omega}(t-\tau))_{U_2} - \frac{\xi}{2} \|B_2^* \dot{\omega}(t-\tau)\|_{U_2}^2 + \frac{\xi}{2} \|B_2^* \dot{\omega}(t)\|_{U_2}^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz amène à

$$E'(t) \leq -\|B_1^* \dot{\omega}\|_{U_1}^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}\right) \|B_2^* \dot{\omega}(t)\|_{U_2}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}\right) \|B_2^* \dot{\omega}(t-\tau)\|_{U_2}^2.$$

Par conséquent, par (3.6), cette estimée donne

$$E'(t) \leq -C_1 \left( \|B_1^* \dot{\omega}(t)\|_{U_1}^2 + \|B_2^* \dot{\omega}(t-\tau)\|_{U_2}^2 \right)$$

avec

$$C_1 = \min \left\{ 1 - \frac{\xi\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right\}$$

qui est positif par (3.8). Notons aussi que (3.6) semble réaliste car, sans cette hypothèse, il existe des cas où des instabilités peuvent apparaître (voir [105, 109] et la Section 2.1).

Sous cette condition et en utilisant un résultat de Arendt et Batty [11] nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité forte du système :

**Proposition 3.1.2** *Supposons (3.6). Alors, pour toute donnée initiale dans  $\mathcal{H}$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

si et seulement si pour tout vecteur propre (non nul)  $\varphi \in D(A)$  de  $A$ , on a

$$B_1^* \varphi \neq 0. \quad (3.9)$$

Remarquons que cette dernière condition est indépendante du retard et par conséquent sous la condition (3.6), notre système est fortement stable si et seulement si le même système sans retard est fortement stable.

Dans la troisième étape, nous étudions la stabilité exponentielle sous la condition (3.6) et une hypothèse de borne venant de Ammari et Tucsnak [10] entre la résolvante de  $A$  et les opérateurs  $B_1$  et  $B_2$  :

si  $\beta > 0$  est fixé et  $C_\beta = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda = \beta\}$ , la fonction

$$\lambda \in C_\beta \rightarrow H(\lambda) = \lambda B^* (\lambda^2 I + A)^{-1} B \in \mathcal{L}(U) \text{ est bornée,} \quad (3.10)$$

où  $B = (B_1, B_2) \in \mathcal{L}(U, V')$  avec  $U = U_1 \times U_2$ .

**Théorème 3.1.1** *Supposons (3.6) et (3.10) pour  $B = (B_1, B_2)$ ,  $U = U_1 \times U_2$ . Si il existe un temps  $T > 0$  et une constante  $C > 0$  tels que l'on ait l'estimée d'observabilité*

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} \omega_0 \right\|_H^2 + \|\omega_1\|_H^2 \leq C \int_0^T \|(B_1^* \phi)'(t)\|_{U_1}^2 dt \quad (3.11)$$

où  $\phi$  est la solution du problème conservatif

$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) + A\phi(t) = 0, & t > 0 \\ \phi(0) = \omega_0, \dot{\phi}(0) = \omega_1, \end{cases} \quad (3.12)$$

alors le système (3.3) est exponentiellement stable dans l'espace d'énergie.

Une fois de plus, cette estimée d'observabilité est indépendante du terme avec retard  $B_2 B_2^* \dot{\omega}(t - \tau)$  et par conséquent, sous les conditions (3.6) et (3.10), la décroissance exponentielle de (3.3) avec  $B_2 = 0$  (i.e. sans retard) implique la décroissance exponentielle de (3.3) (i.e. avec retard). Malgré tout nous donnons dans [110] la dépendance de la décroissance par rapport au retard, en particulier nous montrons que si le retard augmente le taux de décroissance diminue.

Une analyse similaire pour la décroissance polynomiale est effectuée en utilisant le lemme technique 5.2 de [10].

**Théorème 3.1.2** Soit  $\omega$  une solution de (3.3) avec  $(\omega_0, \omega_1, f^0(-\tau \cdot)) \in D(\mathcal{A})$ . Supposons (3.6) et (3.10) pour  $B = (B_1 \ B_2)$ ,  $U = U_1 \times U_2$ . Supposons également qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(\omega_0, \omega_1, z) \in D(\mathcal{A})$ , on a

$$\|\omega_0\|_V^{m+1} \leq C \|(\omega_0, \omega_1, z)\|_{D(\mathcal{A})}^m \|\omega_0\|_{D(A^{\frac{1-m}{2}})} . \quad (3.13)$$

Si il existe un réel positif  $m$ , un temps  $T > 0$  et une constante  $C > 0$  tels que

$$\int_0^T \|(B_1^* \phi)'(t)\|_{U_1}^2 dt \geq C \left( \|\omega_0\|_{D(A^{\frac{1-m}{2}})}^2 + \|\omega_1\|_{D(A^{-\frac{m}{2}})}^2 \right) \quad (3.14)$$

où  $\phi$  est la solution de (3.12), alors l'énergie décroît polynomialement, i.e., il existe  $C > 0$  dépendant de  $m$  et  $\tau$  tels que, pour toute donnée initiale dans  $D(\mathcal{A})$ ,

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{m}}} \left\| (\omega_0, \omega_1, f^0(-\tau \cdot)) \right\|_{D(\mathcal{A})}^2 \quad \forall t > 0.$$

Une fois de plus, nous montrons que si le retard augmente la décroissance devient plus faible.

Pour pouvoir appliquer plus facilement ces résultats, nous donnons la preuve des estimées d'observabilité (3.11) et (3.14) en écrivant les solutions en séries de Fourier, en utilisant l'inégalité d'Ingham (classique ou généralisée) et une réduction à des conditions entre les vecteurs propres de  $A$  et l'opérateur de feedback  $B_1^*$ . Plus précisément, notons  $(\lambda_k)_k$  les valeurs propres de  $A^{1/2}$  et  $(\varphi_k)_k$  les vecteurs propres orthonormés associés. Dans le cas où le gap simple (2.12) est vérifié et les valeurs propres  $(\lambda_k)_k$  sont simples, les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir (3.11) et (3.14) sont respectivement

$$\exists \gamma > 0, \forall k \geq 1, \quad \|B_1^* \varphi_k\|_{U_1} \geq \gamma,$$

et

$$\exists \gamma > 0, \forall k \geq 1, \quad \|B_1^* \varphi_k\|_{U_1} \geq \frac{\gamma}{\lambda_k^m}.$$

Dans le cas des réseaux, on retrouve exactement (2.16)-(2.17).

Étudions maintenant le cas plus général. Notons par  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  l'ensemble des valeurs propres de  $A^{\frac{1}{2}}$  comptées avec leurs multiplicités (i.e. on répète les valeurs propres suivant leurs multiplicités). On réécrit de plus cette suite de valeurs propres  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  comme suit :

$$\lambda_{k_1} < \lambda_{k_2} < \dots < \lambda_{k_i} < \dots$$

où  $k_1 = 1, k_2$  est le plus petit indice de la seconde valeur propre distincte,  $k_3$  est le plus petit indice de la troisième valeur propre distincte, etc. Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , soit  $l_i$  la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_{k_i}$ , i.e.

$$\lambda_{k_{i-1}} < \lambda_{k_i} = \lambda_{k_i+1} = \dots = \lambda_{k_i+l_i-1} < \lambda_{k_i+l_i} = \lambda_{k_{i+1}}.$$

On a  $k_1 = 1, k_2 = 1 + l_1, k_3 = 1 + l_1 + l_2$ , etc. Soit  $\{\varphi_{k_i+j}\}_{0 \leq j \leq l_i-1}$  les vecteurs propres orthonormés associés à la valeur propre  $\lambda_{k_i}$ .

Maintenant, nous supposons la condition de gap généralisé suivante :

$$\exists M \in \mathbb{N}^*, \exists \gamma_0 > 0, \forall k \geq 1, \lambda_{k+M} - \lambda_k \geq M\gamma_0. \quad (3.15)$$

Fixons un réel positif  $\gamma'_0 \leq \gamma_0$  et notons par  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  l'ensemble des entiers naturels  $k_m$  vérifiant (voir par exemple [17])

$$\begin{cases} \lambda_{k_m} - \lambda_{k_{m-1}} \geq \gamma'_0 \\ \lambda_{k_n} - \lambda_{k_{n-1}} < \gamma'_0 \\ \lambda_{k_{m+k}} - \lambda_{k_{m+k-1}} \geq \gamma'_0. \end{cases} \quad \text{pour } m+1 \leq n \leq m+k-1,$$

Grosso-modo les ensembles  $A_k$  sont les paquets de  $k$  valeurs propres distinctes ne s'approchant pas à l'infini (à l'intérieur des paquets les  $k$  valeurs propres peuvent s'approcher à l'infini). On peut alors facilement vérifier que

$$\{k_{m+j} + l \mid k_m \in A_k, k \in \{1, \dots, M\}, j \in \{0, \dots, k-1\}, l \in \{0, \dots, l_{m+j}-1\}\} = \mathbb{N}^*.$$

Remarquons que certains ensembles  $A_k$  peuvent être vides car, par exemple, pour la condition de gap généralisé, le choix de  $M$  prend en compte des valeurs propres multiples. Pour  $k_n \in A_k$ , on définit  $B_{k_n} = (B_{k_n, ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  la matrice de taille  $k \times k$  par

$$B_{k_n, ij} = \begin{cases} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq n+i-1}}^{n+j-1} (\lambda_{k_{n+i-1}} - \lambda_{k_q})^{-1} & \text{si } i \leq j, (i, j) \neq (1, 1), \\ 1 & \text{si } (i, j) = (1, 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De manière plus explicite, on a

$$B_{k_n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_{k_n} - \lambda_{k_{n+1}}} & \frac{1}{(\lambda_{k_n} - \lambda_{k_{n+1}})(\lambda_{k_n} - \lambda_{k_{n+2}})} & \cdots & \frac{1}{(\lambda_{k_n} - \lambda_{k_{n+1}}) \cdots (\lambda_{k_n} - \lambda_{k_{n+k-1}})} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_{k_{n+1}} - \lambda_{k_n}} & \frac{1}{(\lambda_{k_{n+1}} - \lambda_{k_n})(\lambda_{k_{n+1}} - \lambda_{k_{n+2}})} & \cdots & \frac{1}{(\lambda_{k_{n+1}} - \lambda_{k_n}) \cdots (\lambda_{k_{n+1}} - \lambda_{k_{n+k-1}})} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\lambda_{k_{n+2}} - \lambda_{k_n})(\lambda_{k_{n+2}} - \lambda_{k_{n+1}})} & \cdots & \frac{1}{(\lambda_{k_{n+2}} - \lambda_{k_n}) \cdots (\lambda_{k_{n+2}} - \lambda_{k_{n+k-1}})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\lambda_{k_{n+k-1}} - \lambda_{k_n}) \cdots (\lambda_{k_{n+k-1}} - \lambda_{k_{n+k-2}})} \end{pmatrix}.$$

**Lemme 3.1.1** La matrice inverse de  $B_{k_n}$  est donnée par

$$B_{k_n, ij}^{-1} = \begin{cases} \prod_{q=n}^{n+i-2} (\lambda_{k_{n+j-1}} - \lambda_{k_q}) & \text{si } i \leq j, i \neq 1, \\ 1 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est à dire

$$B_{k_n}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (\lambda_{k_{n+1}} - \lambda_{k_n}) & \cdots & (\lambda_{k_{n+k-1}} - \lambda_{k_n}) \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_{k_{n+k-1}} - \lambda_{k_n})(\lambda_{k_{n+k-1}} - \lambda_{k_{n+1}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_{k_{n+k-1}} - \lambda_{k_n}) \cdots (\lambda_{k_{n+k-1}} - \lambda_{k_{n+k-2}}) \end{pmatrix},$$

et par conséquent

$$B_{k_n}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

### 3.1. STABILITÉ DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU SECOND ORDRE AVEC UN FEEDBACK NON BORNÉ AVEC RETARD

Maintenant, pour  $k_n \in A_k$ , on définit la matrice  $\Phi_{k_n}$  avec coefficients dans  $U_1$  et taille  $k \times L_n$ , où  $L_n = \sum_{i=1}^k l_{n+i-1}$ , comme suit : pour tout  $i = 1, \dots, k$ , on pose

$$(\Phi_{k_n})_{ij} = \begin{cases} B_1^* \varphi_{k_{n+i-1}+j-L_{n,i-1}-1} & \text{si } L_{n,i-1} < j \leq L_{n,i}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$L_{n,0} = 0, \quad L_{n,i} = \sum_{i'=1}^i l_{n+i'-1} \text{ pour } i \geq 1. \quad (3.16)$$

Supposons que  $U_1$  est séparable. Pour un vecteur  $c = (c_l)_{l=1}^m$  dans  $U_1^m$ , on pose  $\|c\|_{U_1,2}$  sa norme dans  $U_1^m$  définie par

$$\|c\|_{U_1,2}^2 = \sum_{l=1}^m \|c_l\|_{U_1}^2.$$

Dans le cas où le gap simple (2.12) est vérifié (alors  $A_1 = \mathbb{N}^*$ ,  $B_1 = 1$ ), les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir (3.11) et (3.14) sont respectivement

$$\exists \gamma > 0, \forall k_n \geq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^{l_n}, \quad \|\Phi_{k_n} \xi\|_{U_1} \geq \gamma \|\xi\|_2$$

et

$$\exists \gamma > 0, \forall k \geq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^{l_n}, \quad \|\Phi_{k_n} \xi\|_{U_1} \geq \frac{\gamma}{\lambda_{k_n}^m} \|\xi\|_2.$$

Dans le cas où le gap généralisé (3.15) est vérifié, les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir (3.11) et (3.14) sont respectivement

$$\exists \gamma > 0, \forall k = 1, \dots, M, \forall k_n \in A_k, \forall \xi \in \mathbb{R}^{L_n}, \quad \|B_{k_n}^{-1} \Phi_{k_n} \xi\|_{U_1,2} \geq \gamma \|\xi\|_2$$

et

$$\exists \gamma > 0, \forall k = 1, \dots, M, \forall k_n \in A_k, \forall \xi \in \mathbb{R}^{L_n}, \quad \|B_{k_n}^{-1} \Phi_{k_n} \xi\|_{U_1,2} \geq \frac{\gamma}{\lambda_{k_n}^m} \|\xi\|_2.$$

Ce cadre abstrait peut s'appliquer à de multiples exemples et permet de considérer des opérateurs de feedback  $B_1$  et  $B_2$  différents, à condition qu'ils vérifient (3.6). Nous avons étudié par exemple l'équation des poutres d'Euler-Bernoulli avec des termes de damping internes ou localisés en un point, l'équation des ondes avec des termes de damping répartis (1-d et multi-d) ou encore l'équation des ondes sur un réseau avec des termes de damping répartis. Il permet également de retrouver les résultats de [109] (voir aussi le Chapitre 1).

#### 3.1.2 Retard dépendant du temps

Nous allons maintenant étudier (3.3) avec un retard qui est une fonction strictement positive du temps  $\tau = \tau(t)$ , c'est à dire

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) + B_2 B_2^* \dot{\omega}(t - \tau(t)) = 0 & \text{dans } V', \quad t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, \quad \dot{\omega}(0) = \omega_1, \\ B_2^* \dot{\omega}(t - \tau(0)) = f^0(t - \tau(0)), \quad 0 < t < \tau(0), \end{cases} \quad (3.17)$$

où le retard dépendant du temps  $\tau(t)$  vérifie

$$\exists d < 1, \forall t > 0, \quad \tau(t) \leq d < 1, \quad (3.18)$$

et

$$\exists M > 0, \forall t > 0, \quad 0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq M. \quad (3.19)$$

De plus, on suppose que

$$\forall T > 0, \tau \in W^{2,\infty}([0, T]). \quad (3.20)$$

Il y a deux difficultés principales par rapport au cas précédent (retard constant) :

- l'opérateur du premier ordre associé va dépendre du temps : le résultat d'existence ne va pas découler de la théorie standard des semi-groupes. Nous utiliserons la technique de normes variables de Kato ([83]).
- le système n'est plus invariant par translation en temps : nous ne pourrions donc pas passer par les inégalités d'observabilité du système conservatif associé. Nous introduirons une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov abstraite avec des termes exponentiels et un terme supplémentaire pour prendre en compte la dépendance du retard par rapport au temps.

Cette étude a été réalisée, avec Emilia Fridman (Tel Aviv, Israël) et Serge Nicaise, dans [111] ([NVF09]) pendant ma thèse, pour l'équation de la chaleur et des ondes unidimensionnelle avec amortissement au bord avec retard dépendant du temps, puis dans [64] ([FNV10]) dans cette forme abstraite.

Je vais maintenant donner quelques détails.

Comme précédemment nous commençons par réécrire (3.17) comme un système du premier ordre en introduisant la variable auxiliaire  $z(\rho, t) = B_2^* \dot{\omega}(t - \tau(t)\rho)$  pour  $\rho \in (0, 1)$  et  $t > 0$ . Alors  $z$  vérifie l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \tau(t) \frac{\partial z}{\partial t} + (1 - \dot{\tau}(t)\rho) \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, & 0 < \rho < 1, t > 0, \\ z(0, t) = B_2^* \dot{\omega}(t), \\ z(\rho, 0) = B_2^* \dot{\omega}(-\tau(0)\rho) = f^0(-\tau(0)\rho). \end{cases}$$

Si on pose

$$U := (\omega, \dot{\omega}, z)^T,$$

alors  $U$  satisfait

$$U' = (\dot{\omega}, \ddot{\omega}, \dot{z})^T = \left( \dot{\omega}, -A\omega(t) - B_1 B_1^* \dot{\omega}(t) - B_2 z(1, t), \frac{\dot{\tau}(t)\rho - 1}{\tau(t)} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^T.$$

Par conséquent le système (3.17) peut se réécrire comme l'équation d'évolution du premier ordre

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}(t)U(t), & t > 0, \\ U(0) = (\omega_0, \dot{\omega}_0, f^0(-\tau(0)\cdot)), \end{cases} \quad (3.21)$$

où l'opérateur dépendant du temps  $\mathcal{A}(t)$  est défini par

$$\mathcal{A}(t) \begin{pmatrix} \omega \\ u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\omega - B_1 B_1^* u - B_2 z(1) \\ \frac{\dot{\tau}(t)\rho - 1}{\tau(t)} \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{pmatrix},$$

avec domaine

$$D(\mathcal{A}(t)) := \{(\omega, u, z) \in V \times V \times H^1((0, 1), U_2); z(0) = B_2^* u, A\omega + B_1 B_1^* u + B_2 z(1) \in H\}. \quad (3.22)$$

Il est important de remarquer que le domaine de l'opérateur  $\mathcal{A}(t)$  est indépendant du temps  $t$ , i.e.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) = \mathcal{D}(\mathcal{A}(0)) = Y, \quad \forall t > 0. \quad (3.23)$$

Nous allons alors utiliser le résultat suivant du à Kato (voir par exemple [83]) :

### 3.1. STABILITÉ DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU SECOND ORDRE AVEC UN FEEDBACK NON BORNÉ AVEC RETARD

#### Théorème 3.1.3 Supposons

(i) pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{A}(t)$  engendre un semi-groupe fortement continu sur  $\mathcal{H}$  et la famille  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t) : t \in [0, T]\}$  est stable avec constantes de stabilité  $C$  and  $m$  indépendantes de  $t$  (i.e. le semi-groupe  $(S_t(s))_{s \geq 0}$  engendré par  $\mathcal{A}(t)$  satisfait pour tout  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T, k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left\| \prod_{j=1}^k S_{t_j}(s_j)u \right\|_{\mathcal{H}} \leq C e^{m(s_1 + \dots + s_k)} \|u\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall s_j \geq 0,$$

et pour tout  $u \in \mathcal{H}$ ).

(ii) (3.23) est vérifiée,

(iii)  $\partial_t \mathcal{A}$  appartient à  $L_*^\infty([0, T], B(Y, \mathcal{H}))$ , l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions essentiellement bornées, fortement mesurables de  $[0, T]$  dans l'ensemble  $B(Y, \mathcal{H})$  des opérateurs bornés de  $Y$  dans  $\mathcal{H}$ .

Alors (3.21) a une unique solution mild  $U \in C([0, T], \mathcal{H})$  pour toute donnée initiale dans  $\mathcal{H}$ , et pour tout  $t \in [0, T]$  il existe une constante positive  $c(t)$  telle que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c(t) \|U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Si de plus la donnée initiale est dans  $Y$ , alors (3.4) a une unique solution forte  $U \in C([0, T], Y) \cap C^1([0, T], \mathcal{H})$ .

Afin de vérifier l'hypothèse i) du Théorème 3.1.3, nous allons appliquer la technique des normes variables de Kato (voir [82, 83]). Plus précisément, supposons que

$$\exists 0 < \alpha \leq \sqrt{1-d}, \forall u \in V, \quad \|B_2^* u\|_{U_2}^2 \leq \alpha \|B_1^* u\|_{U_1}^2, \quad (3.24)$$

où  $d$  est donné par (3.18). Ce choix de  $\alpha$  est possible car  $d < 1$  par (3.18). Nous allons alors introduire le produit scalaire variable en temps sur  $\mathcal{H}$  suivant

$$\left\langle \begin{pmatrix} \omega \\ u \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{u} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \right\rangle_t = \left( A^{\frac{1}{2}} \omega, A^{\frac{1}{2}} \tilde{\omega} \right)_H + (u, \tilde{u})_H + q\tau(t) \int_0^1 (z(\rho), \tilde{z}(\rho))_{U_2} d\rho,$$

où  $q$  est une constante positive choisie telle que

$$\frac{1}{\sqrt{1-d}} \leq q \leq \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{1-d}}. \quad (3.25)$$

Ce choix de  $q$  est possible car  $0 < \alpha \leq \sqrt{1-d}$  par (3.24). Notons  $\|\cdot\|_t$  la norme associée. Cette nouvelle norme est clairement équivalente à la norme usuelle associée à (3.1) sur  $\mathcal{H}$ . Pour vérifier i) du Théorème 3.1.3, nous sommes alors ramenés à montrer (voir Proposition 3.4 de [82]) que, pour  $t > 0$  fixé,  $\mathcal{A}(t)$  (à une translation près) est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe de contractions sur  $\mathcal{H}$  (par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ ) et que

$$\frac{\|\phi\|_t}{\|\phi\|_s} \leq e^{\frac{c}{2\tau_0}|t-s|}, \quad \forall t, s \in [0, T],$$

et nous obtenons par conséquent que le système (3.17) est bien posé.

Nous restreignons l'hypothèse (3.24) pour obtenir la décroissance de l'énergie des solutions de (3.17). Pour cela, nous supposons

$$\exists 0 < \alpha < \sqrt{1-d}, \forall u \in V, \quad \|B_2^* u\|_{U_2}^2 \leq \alpha \|B_1^* u\|_{U_1}^2, \quad (3.26)$$

où  $d$  est comme (3.18), ce qui est possible car  $d < 1$ .



On choisit l'énergie suivante

$$E(t) := \frac{1}{2} \left( \|A^{\frac{1}{2}}\omega\|_H^2 + \|\dot{\omega}\|_H^2 + q\tau(t) \int_0^1 \|B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t)\rho)\|_{U_2}^2 d\rho \right), \quad (3.27)$$

où  $q$  est une constante positive satisfaisant

$$\frac{1}{\sqrt{1-d}} < q < \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{1-d}}, \quad (3.28)$$

qui existe par (3.26). Cette énergie correspond au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  dépendant du temps sur  $\mathcal{H}$  défini précédemment. Pour des solutions assez régulières de (3.17), la dérivée de l'énergie vérifie

$$E'(t) = -\|B_1^*\dot{\omega}\|_{U_1}^2 - (B_2^*\dot{\omega}, B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t)))_{U_2} - \frac{q(1 - \dot{\tau}(t))}{2} \|B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t))\|_{U_2}^2 + \frac{q}{2} \|B_2^*\dot{\omega}(t)\|_{U_2}^2.$$

L'inégalité de Young, (3.18) et (3.26) amènent à

$$E'(t) \leq \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{1-d}} + \frac{q\alpha}{2} - 1 \right) \|B_1^*\dot{\omega}\|_{U_1}^2 + \left( \frac{\sqrt{1-d}}{2} - \frac{q(1-d)}{2} \right) \|B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t))\|_{U_2}^2,$$

et par conséquent

$$E'(t) \leq -C \left( \|B_1^*\dot{\omega}(t)\|_{U_1}^2 + \|B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t))\|_{U_2}^2 \right)$$

avec

$$C = \min \left\{ \left( 1 - \frac{q\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{1-d}} \right), \left( \frac{q(1-d)}{2} - \frac{\sqrt{1-d}}{2} \right) \right\}$$

qui est positif d'après (3.28). Dans le cas d'un retard indépendant du temps, nous retrouvons les résultats de [110] (voir la Section 3.1.1).

Nous prouvons alors, sous certaines hypothèses, la stabilité exponentielle de (3.17) en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov abstraite appropriée, définie par

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + \gamma (\mathcal{E}_2(t) + (\mathcal{M}\omega(t), \dot{\omega}(t))_H), \quad (3.29)$$

où  $\gamma$  est une constante positive qui sera choisie plus tard assez petite,  $E$  est l'énergie définie par (3.27) avec  $q$  vérifiant (3.28) et  $\mathcal{E}_2$  est définie par

$$\mathcal{E}_2(t) := q\tau(t) \int_0^1 e^{-2\delta\tau(t)\rho} \|B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t)\rho)\|_{U_2}^2 d\rho, \quad (3.30)$$

où  $\delta$  est un nombre réel positif fixé. De plus, on suppose que l'opérateur  $\mathcal{M} : V \rightarrow H$  satisfait les hypothèses suivantes :

1.

$$\begin{aligned} \exists C_0, C_1, C_2 > 0, \frac{d}{dt} (\mathcal{M}\omega(t), \dot{\omega}(t))_H &\leq -C_0 E_0(t) + C_1 \|B_1^*\dot{\omega}(t)\|_{U_1}^2 \\ &\quad + C_2 \|B_2^*\dot{\omega}(t - \tau(t))\|_{U_2}^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

pour toutes solutions régulières  $\omega$  de (3.17) avec données initiales dans  $D(\mathcal{A}(0))$  et où  $E_0$  est l'énergie naturelle du problème sans retard

$$E_0(t) := \frac{1}{2} \left( \|A^{\frac{1}{2}}\omega(t)\|_H^2 + \|\dot{\omega}(t)\|_H^2 \right),$$

### 3.1. STABILITÉ DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION DU SECOND ORDRE AVEC UN FEEDBACK NON BORNÉ AVEC RETARD

2.

$$\exists C > 0, \forall t > 0, \quad |(\mathcal{M}\omega(t), \dot{\omega}(t))_H| \leq CE_0(t). \quad (3.32)$$

Il est important de noter que les énergies  $E$  et  $\mathcal{E}$  sont équivalentes, par (3.32) :

$$(1 - C\gamma)E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq C_3(\gamma)E(t), \quad \text{pour } \gamma < \frac{1}{C}.$$

On obtient alors le résultat suivant :

**Théorème 3.1.4** *Supposons (3.18), (3.19), (3.20), (3.26), (3.31) et (3.32). Alors il existe des constantes positives  $\nu$  et  $K$  telles que*

$$E(t) \leq Ke^{-\nu t}E(0), \quad \forall t > 0,$$

*pour toutes solutions de (3.17) avec données initiales dans  $\mathcal{H}$ .*

Il est intéressant de remarquer que l'on peut calculer explicitement le taux de décroissance  $\nu$  de l'énergie, qui est donné par

$$\nu = \frac{\gamma}{C_3(\gamma)} \min \left( C_0, 4\delta e^{-2\delta M} \right),$$

avec  $C_3(\gamma) = \max(1 + \gamma C, 1 + 2\gamma)$ ,

$$\gamma < \frac{1}{C}, \quad \gamma \leq \frac{1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{1-d}} - \frac{q\alpha}{2}}{q\alpha + C_1} \quad \text{et} \quad \gamma \leq \frac{\frac{q(1-d)}{2} - \frac{\sqrt{1-d}}{2}}{C_2}.$$

Comme  $M$  est la borne supérieure de  $\tau$ , si le retard  $\tau$  devient grand, le taux de décroissance  $\nu$  devient petit. De plus, on peut choisir  $\delta$  dans (3.30) pour que la décroissance de l'énergie soit aussi rapide que possible pour des paramètres donnés. A ce propos, on remarque que la fonction  $\delta \mapsto 4\delta e^{-2\delta M}$  admet un maximum en  $\delta = \frac{1}{2M}$  et que ce maximum est  $\frac{2}{Me}$ . Donc le taux de décroissance le plus grand est donné par

$$\nu_{\max} = \frac{\gamma}{C_3(\gamma)} \min \left( C_0, \frac{2}{Me} \right).$$

Nous avons appliqué cette théorie à l'équation des ondes 1d et multi-d, à l'équation des poutres et à l'équation des plaques, toutes avec dissipation avec retard dépendant du temps sur une partie du bord.

Je vais donner quelques détails concernant l'équation des ondes multi-dimensionnelle. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) un ouvert borné avec un bord  $\Gamma$  de classe  $C^2$ . Nous supposons que  $\Gamma$  est divisé en deux parties  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$ , i.e.  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , avec  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$  et  $\Gamma_D \neq \emptyset$ . De plus, on suppose

$$\Gamma_N^2 \subseteq \Gamma_N^1 = \Gamma_N.$$

Dans ce domaine  $\Omega$ , on considère le problème aux valeurs initiales et au bord

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = -\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \chi_{\Gamma_N^1} - \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t - \tau(t)) \chi_{\Gamma_N^2} & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t - \tau(0)) = f_0(x, t - \tau(0)) & \text{dans } \Gamma_N^2 \times (0, \tau(0)), \end{cases} \quad (3.33)$$

où  $\nu(x)$  est la normale extérieure au point  $x \in \Gamma$  et  $\partial u / \partial \nu$  est la dérivée normale, et où  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ .

Notons par  $v \cdot w$  le produit scalaire euclidien entre deux vecteurs  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que, en notant par  $m$  le multiplicateur standard

$$m(x) := x - x_0,$$

on ait

$$m(x) \cdot \nu(x) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (3.34)$$

et, pour une constante positive  $\delta$ ,

$$m(x) \cdot \nu(x) \geq \delta > 0 \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (3.35)$$

Dans le cas particulier où  $\Omega = O_1 \setminus O_2$ ,  $O_1$  et  $O_2$  étant deux ensembles convexes tels que  $O_2 \subset O_1$ , les hypothèses (3.34)-(3.35) sont vérifiées avec  $\Gamma_N = \partial O_1$  et  $\Gamma_D = \partial O_2$  pour tout  $x_0 \in O_2$ .

Pour écrire ce système sous la forme (3.17), on pose  $H = L^2(\Omega)$  et l'opérateur  $A : D(A) \rightarrow H$  défini par  $A\varphi = -\Delta\varphi$  où  $D(A) = \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap V : \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}$ , avec  $V = H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ . L'opérateur  $A$  est auto-adjoint et positif avec inverse compact dans  $H$ . On définit maintenant  $U_1 = L^2(\Gamma_N^1)$ ,  $U_2 = L^2(\Gamma_N^2)$  et les opérateurs  $B_i^* : V \rightarrow U_i$  par

$$B_i^* \varphi = \sqrt{\alpha_i} \varphi|_{\Gamma_N^i}, \quad i = 1, 2 \quad (\varphi \in V) \quad (3.36)$$

où  $\varphi|_{\Gamma_N^i}$  est l'opérateur de trace appliqué à  $\varphi$ . L'opérateur  $B_i : U_i \rightarrow V'$  est alors défini par dualité :

$$\langle B_i u, v \rangle_{V', V} = \sqrt{\alpha_i} \int_{\Gamma_N^i} u v \, d\Gamma. \quad (3.37)$$

On remarque que (3.24) est équivalent à

$$\alpha_2^2 \leq (1-d)\alpha_1^2,$$

et sous cette condition le système (3.33) est bien posé, et son énergie décroît si  $\alpha_2^2 < (1-d)\alpha_1^2$ .

Pour prouver la stabilité exponentielle de (3.33), on introduit la fonctionnelle de Lyapunov (3.29) avec l'opérateur  $\mathcal{M} : V \rightarrow H$  défini par

$$\mathcal{M}u = 2m \cdot \nabla u + (n-1)u.$$

Nous pouvons montrer (3.32) par l'inégalité de Poincaré et (3.31) par l'identité des multiplicateurs. Par conséquent, le système (3.33) est exponentiellement stable sous les hypothèses précédentes.

Dans un travail [107] ([NPV11]) réalisé en collaboration avec Serge Nicaise et Cristina Pignotti (L'Aquila, Italie), nous avons réussi à nous passer de la condition (3.19), le retard  $\tau$  pouvant s'annuler, c'est à dire nous avons seulement supposé

$$0 \leq \tau(t) \leq M, \quad \forall t > 0. \quad (3.38)$$

La principale difficulté est dans l'existence de solution. En prenant  $\tau_\epsilon(t) = \tau(t) + \epsilon$  pour tout  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , alors  $0 < \epsilon \leq \tau_\epsilon(t) \leq M + \epsilon$ , i.e.  $\tau_\epsilon$  satisfait (3.19). Nous avons donc existence de solution  $u_\epsilon$  du système (3.33) avec pour retard  $\tau_\epsilon$ . Le but est alors de prendre la limite  $(u_\epsilon)_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$  quand  $\epsilon$  tend vers 0. Pour cela nous avons besoin de plus de régularité des solutions, et en particulier, nous supposons que

$$\tau \in W^{3,\infty}([0, T]), \quad \forall T > 0. \quad (3.39)$$

Nous avons également étendu les résultats précédents à une version non linéaire :

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, +\infty) \quad (3.40)$$

$$u(x, t) = 0 \text{ sur } \Gamma_D \times (0, +\infty) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = -\beta_1(u_t(x, t)) - \beta_2(u_t(x, t - \tau(t))) \text{ sur } \Gamma_N \times (0, +\infty) \quad (3.42)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ et } u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega \quad (3.43)$$

$$u_t(x, t - \tau(0)) = g_0(x, t - \tau(0)) \text{ dans } \Gamma_N \times (0, \tau(0)), \quad (3.44)$$

où  $\beta_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2$ , satisfont des hypothèses de croissance appropriées. En particulier, nous supposons

$$|\beta_j(s)| \leq c_j |s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \quad (3.45)$$

pour des constantes positives  $c_1, c_2$ , et

$$\beta_2(s) \cdot s \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

De plus, on suppose que  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et qu'elles satisfont

$$\exists \gamma_1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, (\beta_1(x) - \beta_1(y))(x - y) \geq \gamma_1(x - y)^2, \quad (3.47)$$

$$\exists \gamma_2 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |\beta_2(x) - \beta_2(y)| \leq \gamma_2 |x - y|. \quad (3.48)$$

L'opérateur du premier ordre  $\mathcal{A}(t)$  correspondant est non-linéaire à cause de son domaine et par conséquent nous ne pouvons pas appliquer la méthode développée précédemment (Théorème 3.1.3 énoncé dans [83]). Nous avons besoin d'une variante pour des opérateurs maximaux monotones avec un produit scalaire dépendant "régulièrement" du temps (voir [81]). Nous avons également besoin de l'hypothèse technique (3.19). La preuve de stabilité se fait de manière similaire, à l'aide d'une fonctionnelle de Lyapunov appropriée.

## 3.2 Stabilité de l'équation de Korteweg-de Vries non linéaire avec un retard

Nous nous intéressons à la stabilité de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) sur un intervalle borné, c'est à dire que l'on considère l'équation  $y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0$  avec conditions aux bords sur  $y(0, \cdot)$ ,  $y(L, \cdot)$  et  $y_x(L, \cdot)$ . Ajouter un terme retardé dans le feedback au bord de cette équation est une manière de prendre en compte le fait que tout dispositif placé pour mettre en oeuvre un contrôle au bord par rétroaction agit avec un certain délai de réaction. Un domaine d'application pourrait être par exemple l'étude du flux dans un vaisseau sanguin qui peut être modélisé par l'équation de KdV (voir [49]). Le but de ce travail, en dehors de la difficulté de travailler avec une équation non linéaire, est de vérifier si un retard dans le feedback (au bord ou interne) déstabilisera ou non le système ([55, 56]).

Le premier travail concernant la stabilité de l'équation de KdV (sans retard) sur un domaine borné est [144], où la longueur du domaine spatial est  $L = 1$ , et la stabilité exponentielle est obtenue sous une hypothèse appropriée sur le poids du feedback. Comme attendu quand on travaille sur l'équation de KdV avec conditions de Dirichlet homogènes et de Neumann à droite, la longueur  $L$  du domaine joue un rôle dans la capacité de contrôler ([37], [46], [124]) ou stabiliser ([116], [125]) la solution de l'équation. En effet, il est bien connu que si  $L = 2\pi$ , il existe une solution  $(y(x, t) = 1 - \cos x)$  du système linéarisé autour de 0 qui a une énergie constante. Plus généralement, en définissant l'ensemble des longueurs critiques

$$\mathcal{N} = \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}, k, l \in \mathbb{N}^* \right\},$$

il est bien connu que l'équation linéarisée autour de 0 est exactement contrôlable avec un seul contrôle à droite de type Neumann si et seulement si  $L \notin \mathcal{N}$  (voir [124]) et la contrôlabilité exacte locale suit pour l'équation de KdV non linéaire (en utilisant un argument de point fixe) si  $L \notin \mathcal{N}$ . D'autres résultats montrent que l'équation de KdV non linéaire est en fait localement exactement contrôlable pour toutes longueurs critiques contrairement à l'équation de KdV linéaire [36, 38, 46]. On rappelle que stabilité et contrôlabilité sont intrinséquement liées par des résultats d'observabilité des problèmes adjoints et directs, voir par exemple [126].

Néanmoins, concernant la stabilité, dans le cas de longueurs non critiques, il n'est pas nécessaire (voir [116]) d'introduire une loi de feedback comme dans [144] pour avoir la stabilité locale exponentielle de l'équation de KdV non linéaire. De plus, il est prouvé dans [116] et [113] que pour toutes longueurs critiques, ajouter un amortissement localisé dans l'équation de KdV non linéaire permet d'avoir une stabilité exponentielle locale, et même une stabilité semi-globale en travaillant directement avec le système non linéaire.

Dans les deux prochaines sous-sections, je vais m'intéresser à la robustesse de la stabilité exponentielle par rapport au retard dans des feedbacks aux bords, puis internes.

### 3.2.1 Cas d'un retard au bord

Cette section fait référence au travail [25] ([BCV19]) écrit en collaboration avec Lucie Baudouin et Emmanuelle Crépeau.

Nous étudions donc la stabilité de l'équation de KdV non linéaire suivante avec un feedback au bord avec un terme retardé

$$\begin{cases} y_t(x, t) + y_{xxx}(x, t) + y_x(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t > 0, \\ y_x(L, t) = \alpha y_x(0, t) + \beta y_x(0, t - h), & t > 0, \\ y_x(0, t) = z_0(t), & t \in (-h, 0), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $h > 0$  est le retard,  $L > 0$  est la longueur du domaine spatial,  $\alpha$  et  $\beta \neq 0$  sont des paramètres réels constants et  $y(x, t)$  est l'amplitude de la vague à la position  $x$  au temps  $t$ . La donnée initiale  $y_0$  est supposée appartenir à  $L^2(0, L)$  et la donnée retardée de Neumann au bord gauche  $z_0$  à  $L^2(-h, 0)$ .

On définit l'espace de Hilbert des données initiales et au bord  $\mathcal{H} := L^2(0, L) \times L^2(-h, 0)$ , muni de la norme définie pour tout  $(y, z) \in \mathcal{H}$  par

$$\|(y, z)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L y^2(x) dx + |\beta| \int_{-h}^0 z^2(s) ds.$$

Dans le cas sans retard (i.e.  $\beta = 0$ ) il est bien connu (voir par exemple [144]) que pour tout  $T > 0$ ,  $L > 0$  et  $y_0 \in L^2(0, L)$ , le système (3.49) est localement bien posé dans

$$\mathcal{B} := C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L)).$$

Dans le cas avec retard (i.e.  $\beta \neq 0$ ), la méthode pour montrer que le problème est bien posé est de commencer par considérer l'équation linéarisée autour de zéro (c'est à dire sans le terme non linéaire  $yy_x$ ) avec retard et d'introduire, comme expliqué dans la Section 3.1.1, la variable auxiliaire  $z(\rho, t) = y_x(0, t - \rho h)$  où  $\rho \in (0, 1)$  et  $t > 0$ , qui vérifie une équation de transport. Ceci permet d'écrire notre système linéaire comme un système du premier ordre, avec un opérateur du premier ordre  $\mathcal{A}$  dissipatif et dont l'adjoint est également dissipatif sous l'hypothèse

$$|\alpha| + |\beta| < 1. \quad (3.50)$$

On montre ensuite des estimées de régularité des solutions du problème linéaire par la technique des multiplicateurs, avant de prouver que le système linéaire avec second membre et avec retard au bord est bien posé, avec les estimées de régularité souhaitées. Il nous suffit alors d'appliquer un argument de point fixe pour montrer que le système (3.49) admet une unique solution dans  $\mathcal{B}$  pour des données initiales dans  $\mathcal{H}$  assez petites.

On définit l'énergie du système (3.49) comme suit, choisie pour correspondre à la norme de  $(y(\cdot, t), y_x(0, t + \cdot))$  dans  $\mathcal{H}$  :

$$E(t) = \int_0^L y^2(x, t) dx + |\beta| h \int_0^1 y_x^2(0, t - h\rho) d\rho. \quad (3.51)$$

Ce choix est classique quand on considère des termes au bord retardés, comme dans [105] (voir aussi la Section 3.1.1). Nous pouvons remarquer que la dérivée de l'énergie vérifie, pour des solutions assez régulières,

$$\frac{d}{dt} E(t) = (\alpha^2 - 1 + |\beta|) y_x^2(0, t) + (\beta^2 - |\beta|) y_x^2(0, t - h) + 2\alpha\beta y_x(0, t) y_x(0, t - h),$$

que l'on peut montrer être négative sous l'hypothèse (3.50). Cette limitation (3.50) est nécessaire même pour l'existence de solutions et nous pouvons référer au cas sans retard ( $\beta = 0$ ,  $|\alpha| < 1$ ) dans [144]. Remarquons que, dans [105], pour l'équation des ondes, il y a des restrictions sur les coefficients des termes avec et sans retard. C'est également le cas pour des équations aux dérivées partielles hyperboliques ou paraboliques dans [110, 111, 64] (voir aussi la Section 3.1.1) et même pour l'équation de Schrödinger (qui est une équation dispersive, comme KdV) dans [108]. Dans ces papiers, le coefficient du terme avec retard doit être plus petit que le coefficient du terme sans retard, i.e. avec nos notations :  $0 \leq \beta < \alpha$ . Ce genre de restriction est nécessaire dans ces cas et si elle n'est pas vérifiée, des instabilités peuvent apparaître (voir par exemple [55], [56] avec  $\alpha = 0$ , ou [105] dans un cas plus général pour l'équation des ondes). Pour l'équation de KdV avec retard dans la dissipation au bord, nous n'avons pas ce genre de restriction. Nous pouvons prendre  $\alpha = 0$  (et alors  $|\beta| < 1$ ) ou même  $\alpha = \beta = 0$ , en adaptant bien évidemment le produit scalaire et les preuves. Le but de ce travail est de montrer la robustesse de la stabilité par rapport au retard, i.e. qu'un retard ne déstabilise pas le système, contrairement à beaucoup d'autres systèmes retardés (voir [55, 56, 97, 123]).

Notre premier résultat principal est obtenu avec une hypothèse restrictive sur la longueur  $L$ , mais donne la stabilité exponentielle des solutions du système (3.49) avec une estimation du taux de décroissance.

**Théorème 3.2.1** *Supposons que  $\alpha$  et  $\beta \neq 0$  satisfont (3.50) et supposons que la longueur  $L$  est telle que*

$$L < \pi\sqrt{3}. \quad (3.52)$$

*Alors, il existe  $r > 0$  suffisamment petit, tel que pour tout  $(y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  satisfaisant*

$$\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq r,$$

*l'énergie du système (3.49), notée  $E$  et définie par (3.51), décroît exponentiellement. Plus précisément, il existe deux constantes positives  $\gamma$  et  $\kappa$  telles que*

$$E(t) \leq \kappa E(0) e^{-2\gamma t}, \quad t > 0,$$

*où, pour  $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$  assez petits,*

$$\gamma \leq \min \left\{ \frac{(9\pi^2 - 3L^2 - 2L^{3/2}r\pi^2)\mu_1}{6L^2(1 + L\mu_1)}, \frac{\mu_2}{2(\mu_2 + |\beta|h)} \right\}, \quad (3.53)$$

$$\kappa \leq \left(1 + \max \left\{ L\mu_1, \frac{\mu_2}{|\beta|} \right\} \right).$$

Ce théorème est prouvé de manière constructive, ce qui nous permet d'avoir une estimation du taux de décroissance  $\gamma$ . Un tel résultat nous semble nouveau dans la littérature pour la stabilité des équations de KdV non-linéaires. La preuve utilise une fonctionnelle de Lyapunov appropriée :

$$V(t) = E(t) + \mu_1 V_1(t) + \mu_2 V_2(t), \quad (3.54)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2 \in (0, 1)$  sont des constantes positives fixées dans la preuve,  $E$  est l'énergie définie par (3.51),  $V_1$  est défini par

$$V_1(t) = \int_0^L xy^2(x, t) dx, \quad (3.55)$$

et  $V_2$  est défini par

$$V_2(t) = h \int_0^1 (1 - \rho) y_x^2(0, t - h\rho) d\rho. \quad (3.56)$$

Il est clair que ces deux énergies  $E$  et  $V$  sont équivalentes. Notons de plus d'après (3.53), que quand le retard  $h$  devient plus grand, alors le taux de décroissance  $\gamma$  est plus petit. Dans le cas sans retard (i.e.  $\beta = 0$ ), en adaptant les résultats précédents, la stabilité exponentielle du Théorème 3.2.1 est satisfaite si et seulement si  $|\alpha| < 1$ , ce qui correspond aux hypothèses données dans [144] et [116]. Dans le cas où  $\alpha = 0$ , la stabilité exponentielle du Théorème 3.2.1 est satisfaite si et seulement si  $|\beta| < 1$ . Même si  $\alpha = \beta = 0$ , le Théorème 3.2.1 montre que le système (3.49) est exponentiellement stable dans le cas où  $0 < L < \sqrt{3}\pi$  (voir [116] dans le cas où  $L \notin \mathcal{N}$ ). On rappelle que le résultat principal de ce travail est de montrer qu'un retard ne peut pas déstabiliser le système, ce qui peut être le cas, comme nous l'avons vu, de beaucoup d'autres systèmes retardés ([55], [56], [97], [123]). Remarquons enfin que l'hypothèse  $L < \sqrt{3}\pi$  élimine l'ensemble des longueurs critiques  $\mathcal{N}$  (voir [124]), mais aussi beaucoup de valeurs non critiques. La condition  $L < \sqrt{3}\pi$  est technique et vient du choix du multiplicateur  $x$  dans l'expression de  $V_1$ . Trouver un meilleur multiplicateur semble être un problème ouvert.

Notre second résultat principal est obtenu simplement pour des longueurs non critiques et donne la stabilité exponentielle des solutions du système (3.49).

**Théorème 3.2.2** *Supposons que la longueur  $L > 0$  satisfait  $L \notin \mathcal{N}$  et que  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient (3.50). Alors, il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $(y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  satisfaisant*

$$\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq r,$$

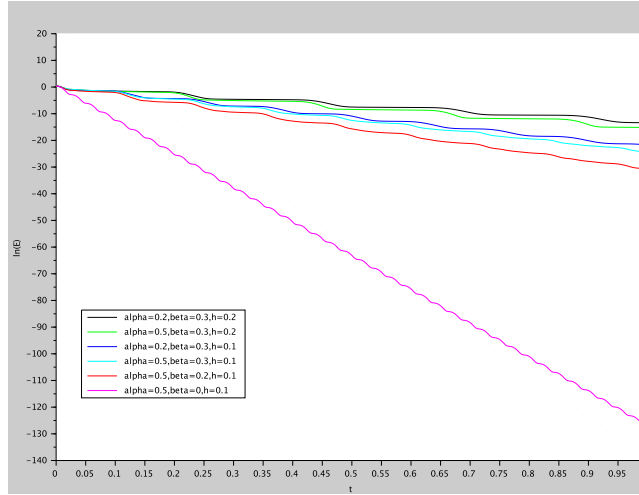
*l'énergie du système (3.49), notée  $E$  et définie par (3.51), décroît exponentiellement.*

La preuve de ce théorème est basée sur une inégalité d'observabilité

$$\int_0^L y_0^2(x) dx + |\beta| h \int_0^1 z_0^2(-h\rho) d\rho \leq C \int_0^T \left( y_x^2(0, t) + z^2(1, t) \right) dt$$

pour le système linéarisé autour de zéro et l'utilisation d'un argument par l'absurde. La valeur du taux de décroissance ne peut donc pas être estimée avec cette approche.

Nous avons enfin proposé d'illustrer nos résultats par des simulations numériques, et pour cela nous avons adapté un schéma numérique de [44] au cas avec retard. En prenant les paramètres  $T = 1$ ,  $L = 1$  et les conditions initiales  $y_0(x) = 1 - \cos(2\pi x)$  et  $z_0(\rho) = 0.1 \sin(-2\pi\rho h)$ , on obtient la Figure 3.1, qui représente  $t \mapsto \ln(E(t))$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $h$ . On peut voir que quand il n'y a pas de retard, l'énergie est très exponentiellement décroissante et que si le coefficient du retard  $\beta$ , ou si le retard  $h$ , augmente, alors l'énergie décroît exponentiellement mais moins vite.


 FIGURE 3.1 – Représentation de  $t \mapsto \ln(E(t))$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $h$ .

### 3.2.2 Cas d'un retard interne

Je vais maintenant développer les différences avec le cas d'un retard dans un feedback interne, que j'ai écrit récemment dans [136] ([V20]). Plus précisément, j'étudie

$$\begin{cases} y_t(x, t) + y_{xxx}(x, t) + y_x(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) + a(x)y(x, t) + b(x)y(x, t-h) = 0, \\ y(0, t) = y(L, t) = y_x(L, t) = 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), \\ y(x, t) = z_0(x, t), \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in (0, L), t > 0, \\ t > 0, \\ x \in (0, L), \\ x \in (0, L), t \in (-h, 0), \end{matrix} \quad (3.57)$$

où  $h > 0$  est le retard (constant),  $L > 0$  est la longueur du domaine spatial,  $y(x, t)$  est l'amplitude de la vague à la position  $x$  au temps  $t$ , et  $a = a(x)$  et  $b = b(x)$  sont des fonctions positives ou nulles appartenant à  $L^\infty(0, L)$ . On suppose que  $\text{supp } b = \omega$ , où  $\text{supp } b$  est le support de la fonction  $b$ , et

$$b(x) \geq b_0 > 0 \quad \text{p.p. dans } \omega \quad (3.58)$$

où  $\omega$  est un ouvert non vide de  $(0, L)$ .

On suppose tout d'abord que les coefficients  $a$  et  $b$  satisfont les hypothèses suivantes :

$$\exists c_0 > 0, \quad b(x) + c_0 \leq a(x) \quad \text{p.p. dans } \omega. \quad (3.59)$$

Notons que (3.58) et (3.59) impliquent que  $\omega = \text{supp } b \subset \text{supp } a$  et

$$a(x) \geq b_0 + c_0 > 0 \quad \text{p.p. dans } \omega. \quad (3.60)$$

On définit l'espace de Hilbert des données initiale et retardée  $\mathcal{H} := L^2(0, L) \times L^2((-h, 0))$ , muni de la norme définie pour tout  $(y, z) \in \mathcal{H}$  par

$$\|(y, z)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L y^2(x) dx + \int_0^L \int_{-h}^0 \xi(x) z^2(x, s) dx ds,$$

où  $\xi$  est une fonction positive ou nulle dans  $L^\infty(0, L)$  choisie telle que  $\text{supp } \xi = \text{supp } b = \omega$  et

$$b(x) + c_0 \leq \xi(x) \leq 2a(x) - b(x) - c_0 \quad \text{p.p. dans } \omega. \quad (3.61)$$



Notons que ce choix de  $\xi$  est possible par (3.59).

On définit l'énergie du système (3.57), correspondant à la norme de  $(y(\cdot, t), y(\cdot, t + \cdot))$  sur  $\mathcal{H}$ , par :

$$E(t) = \int_0^L y^2(x, t) dx + h \int_\omega \int_0^1 \xi(x) y^2(x, t - h\rho) d\rho dx, \quad (3.62)$$

où  $\xi \in L^\infty(0, L)$  est définie par (3.61). La première partie de l'énergie  $E$  correspond à l'énergie naturelle de l'équation de KdV, et la seconde est classique quand on considère des équations avec retard interne, comme dans [105] pour l'équation des ondes.

Alors, pour toute solution régulière, la dérivée de l'énergie du système (3.57) vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= -y_x^2(0, t) - 2 \int_0^L a(x) y^2(x, t) dx - 2 \int_0^L b(x) y(x, t) y(x, t - h) dx \\ &\quad + \int_\omega \xi(x) y^2(x, t) dx - \int_\omega \xi(x) y^2(x, t - h) dx \\ &\leq -y_x^2(0, t) + \int_\omega (-2a(x) + b(x) + \xi(x)) y^2(x, t) dx - 2 \int_{(0, L) \setminus \omega} a(x) y^2(x) dx \\ &\quad + \int_\omega (b(x) - \xi(x)) y^2(x, t - h) dx, \end{aligned}$$

qui est négative par les hypothèses (3.60) et (3.61) (venant de (3.58)-(3.59)).

Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve l'hypothèse (3.59) (c'est à dire le poids du feedback avec retard est plus petit que le poids du feedback sans retard) dans [105] (ainsi que dans d'autres papiers cités précédemment, voir Section 3.1.1) et correspond à (3.5), ce dont on n'avait pas besoin pour l'équation de KdV avec retard dans le feedback au bord (voir [25] ou la Section 3.2.1). Ceci sera confirmé avec des tests numériques.

Appliquant les mêmes méthodes que dans la Section 3.2.1, on montre que le système (3.57) est bien posé ainsi que les deux résultats de stabilité exponentielle locale suivants.

**Théorème 3.2.3** *Supposons que  $a$  et  $b$  sont des fonctions positives ou nulles de  $L^\infty(0, L)$  satisfaisant (3.58) et (3.59), et supposons que la longueur  $L$  vérifie (3.52). Alors il existe  $r > 0$  suffisamment petit, tel que pour tout  $(y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  satisfaisant*

$$\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq r,$$

*l'énergie du système (3.57), définie par (3.62), décroît exponentiellement. Plus précisément, il existe deux constantes positives  $\gamma$  et  $\kappa$  telles que*

$$E(t) \leq \kappa E(0) e^{-2\gamma t}, \quad t > 0,$$

*où, pour  $\mu_1, \mu_2$  suffisamment petits,*

$$\gamma \leq \min \left\{ \frac{(9\pi^2 - 3L^2 - 2L^{3/2}r\pi^2)\mu_1}{6L^2(1 + L\mu_1)}, \frac{\mu_2}{2h(\mu_2 + \|\xi\|_{L^\infty(0, L)})} \right\}, \quad (3.63)$$

$$\kappa \leq \left( 1 + \max \left\{ L\mu_1, \frac{\mu_2}{b_0} \right\} \right).$$

Ce résultat est prouvé en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov appropriée et donne une estimation du taux de décroissance. Quand le retard  $h$  est grand, le taux de décroissance  $\gamma$  est petit.

Le second résultat est valable pour toutes les longueurs (contrairement à [25] ou dans la Section 3.2.1 qui a seulement lieu pour toutes longueurs non critiques) et énonce la stabilité exponentielle locale du système (3.57).

**Théorème 3.2.4** Soit  $L > 0$  et  $a$  et  $b$  deux fonctions positives ou nulles appartenant à  $L^\infty(0, L)$  satisfaisant (3.58) et (3.59). Alors, il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $(y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  satisfaisant

$$\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq r,$$

l'énergie du système (3.57) décroît exponentiellement.

Comme précédemment la preuve est basée sur une inégalité d'observabilité

$$\begin{aligned} \int_0^L y_0^2(x) dx + h \int_\omega \int_0^1 \xi(x) z_0^2(x, -h\rho) dx d\rho \\ \leq C \left( \int_0^T y_x^2(0, t) dt + \int_0^T \int_0^L a(x) y^2(x, t) dx dt + \int_0^T \int_\omega z^2(x, 1, t) dx dt \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

du système linéarisé autour de zéro et l'utilisation d'un raisonnement par l'absurde. Nous n'avons donc pas d'estimation du taux de décroissance.

De plus, contrairement à [25] ou à la Section 3.2.1, je donne un résultat de stabilité semi-globale pour toutes longueurs, en travaillant directement avec le système non linéaire (3.57), sans passer par le système linéaire ([37, 113]).

**Théorème 3.2.5** Supposons que  $a$  et  $b$  sont des fonctions positives ou nulles dans  $L^\infty(0, L)$  satisfaisant (3.58) et (3.59). Soit  $L > 0$  et  $R > 0$ . Il existe  $C = C(R) > 0$  et  $\mu = \mu(R) > 0$  tels que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t}, \quad t > 0,$$

pour toute solution de (3.57) avec  $\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq R$ .

Le caractère semi-global de ce résultat vient du fait que même si on est capable de choisir n'importe quel rayon  $R$  pour les données initiales, le taux de décroissance  $\mu$  dépend de  $R$ . Pour prouver ce résultat, on montre par l'absurde une inégalité d'observabilité pour le système non linéaire (3.57). Les principales difficultés sont le passage à la limite dans le terme non linéaire et le fait que ce terme non linéaire ne permet pas d'utiliser le théorème d'Holmgren. Nous utiliserons à la place une propriété de continuation unique du système non linéaire du à [127] (et pour cela nous avons besoin de régularité de la solution,  $u \in L^2(0, T, H^3(0, L))$ ).

Finalement, je donne un résultat de stabilité locale dans le cas où  $\text{supp } b \not\subset \text{supp } a$ , avec une hypothèse restrictive sur la longueur  $L$  du domaine et en supposant le poids du feed-back retardé assez petit.

**Théorème 3.2.6** Supposons que  $a$  et  $b$  sont des fonctions positives ou nulles dans  $L^\infty(0, L)$  satisfaisant (3.58) et supposons que la longueur  $L$  vérifie (3.52). Soit  $\xi > 1$ . Alors il existe  $\delta > 0$  (dépendant de  $\xi, L, h$ ) et  $r > 0$  suffisamment petit tels que si

$$\|b\|_{L^\infty(0, L)} \leq \delta,$$

pour tout  $(y_0, z_0) \in \mathcal{H}$  satisfaisant

$$\|(y_0, z_0)\|_{\mathcal{H}} \leq r,$$

l'énergie du système (3.57) définie par (3.62) avec  $\xi(x) = \xi b(x)$ , décroît exponentiellement.

Pour prouver ce théorème, on considère un problème auxiliaire "proche" dont l'énergie est décroissante et on utilise un résultat de perturbation classique de Pazy [114], inspiré par [106]. Il est intéressant de remarquer que l'on peut prendre  $a = 0$  dans le Théorème 3.2.6.

Plus précisément, dans le cas où  $\omega = \text{supp } b \not\subset \text{supp } a$ , la dérivée de l'énergie  $E$ , pour une solution régulière de (3.57), définie par (3.62), satisfait pour tout  $\xi \in L^\infty(0, L)$  tel que  $\text{supp } \xi = \text{supp } b$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= -y_x^2(0, t) - 2 \int_{\text{supp } a} a(x) y^2(x, t) dx - 2 \int_{\omega} b(x) y(x, t) y(x, t-h) dx \\ &\quad + \int_{\omega} \xi(x) y^2(x, t) dx - \int_{\omega} \xi(x) y^2(x, t-h) dx \\ &\leq -y_x^2(0, t) - 2 \int_{\text{supp } a} a(x) y^2(x, t) dx + \int_{\omega} (b(x) + \xi(x)) y^2(x, t) dx \\ &\quad + \int_{\omega} (b(x) - \xi(x)) y^2(x, t-h) dx, \end{aligned}$$

et donc l'énergie n'est pas décroissante en général à cause du terme  $b(x) + \xi(x) > 0$  sur  $\omega$ .

En s'inspirant de [106], on considère le problème auxiliaire suivant, qui est "proche" de (3.57), mais dont l'énergie est décroissante :

$$\begin{cases} y_t(x, t) + y_{xxx}(x, t) + y_x(x, t) + y(x, t) y_x(x, t) + a(x) y(x, t) \\ \quad + b(x) y(x, t-h) + \xi b(x) y(x, t) = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ y(0, t) = y(L, t) = y_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, L), \\ y(x, t) = z_0(x, t), & x \in (0, L), t \in (-h, 0), \end{cases} \quad (3.65)$$

où  $\xi$  est une constante positive. On choisit alors l'énergie définie par (3.62) avec  $\xi(x) = \xi b(x)$ , i.e.

$$E(t) = \int_0^L y^2(x, t) dx + h \xi \int_{\omega} \int_0^1 b(x) y^2(x, t-h\rho) d\rho dx. \quad (3.66)$$

Alors la dérivée de cette énergie  $E$ , pour une solution régulière de (3.65), satisfait

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= -y_x^2(0, t) - 2 \int_{\text{supp } a} a(x) y^2(x, t) dx - 2 \int_{\omega} b(x) y(x, t) y(x, t-h) dx \\ &\quad - 2 \xi \int_{\omega} b(x) y^2(x, t) dx + \xi \int_{\omega} b(x) y^2(x, t) dx - \xi \int_{\omega} b(x) y^2(x, t-h) dx \\ &\leq -y_x^2(0, t) - 2 \int_{\text{supp } a} a(x) y^2(x, t) dx + \int_{\omega} (b(x) - \xi b(x)) y^2(x, t) dx \\ &\quad + \int_{\omega} (b(x) - \xi b(x)) y^2(x, t-h) dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

en prenant  $\xi > 1$ . Pour montrer la stabilité exponentielle de (3.57) à partir de la stabilité exponentielle de (3.65), on utilise le résultat de perturbation classique de Pazy [114] :

**Théorème 3.2.7** Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $A$  un générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $T(t)$  sur  $X$  satisfaisant  $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ . Si  $B$  est un opérateur linéaire borné sur  $X$ , alors  $A + B$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $S(t)$  sur  $X$  satisfaisant  $\|S(t)\| \leq M e^{(\omega + M\|B\|)t}$ .

La stratégie pour traiter le cas  $\text{supp } b \not\subset \text{supp } a$  est ainsi la suivante : on prouve d'abord la stabilité exponentielle des solutions de (3.65) linéarisé autour de 0 par l'approche Lyapunov pour tout  $L < \sqrt{3}\pi$  (ce qui permet d'avoir une estimation du taux de décroissance), puis on montre la stabilité exponentielle du système linéarisé de (3.57) en utilisant le Théorème 3.2.7 pour tout  $L < \sqrt{3}\pi$  et pour  $\|b\|_{L^\infty(0, L)}$  assez petit. Enfin on obtient la stabilité exponentielle locale du système non linéaire (3.57) pour tout  $L < \sqrt{3}\pi$  et pour  $\|b\|_{L^\infty(0, L)}$  assez petit comme précédemment.

Pour appliquer le Théorème 3.2.7, nous avons besoin d'une estimation du taux de décroissance du système auxiliaire (3.65) linéarisé autour de 0. C'est pourquoi nous utilisons

une méthode de Lyapunov et nous supposons (3.52). Si nous prouvons une inégalité d'observabilité comme dans le Théorème 3.2.4 (valable sans restriction sur la longueur du domaine), nous n'aurons pas d'estimation de la constante d'observabilité  $C$  dans (3.64) puisque nous utilisons un raisonnement par l'absurde. Le taux de décroissance du système auxiliaire linéarisé est alors donné par  $\alpha = \frac{1}{T} \ln \left( 1 + \frac{C_1}{C} \right)$  et on voudrait vérifier que  $-\alpha + \sqrt{\beta\xi} \|b\|_{L^\infty(0,L)} < 0$ . Mais la constante d'observabilité  $C$  peut dépendre de  $\|b\|_{L^\infty(0,L)}$  et donc cette hypothèse est difficile à vérifier. Enlever l'hypothèse (3.52) dans le cas où  $\text{supp } b = \omega \not\subset \text{supp } a$  est, à ma connaissance, un problème ouvert intéressant.

Donnons maintenant quelques simulations numériques afin d'illustrer ces résultats, en adaptant le schéma numérique de [44] (voir aussi [25]). On prend les paramètres  $T = 10$ ,  $L = 3$ ,  $h = 2$  et les conditions initiales  $y_0(x) = 1 - \cos(2\pi x)$  et  $z_0(x, \rho) = (1 - \cos(2\pi x)) \cos(2\pi \rho h)$  avec  $\text{supp } a = \text{supp } b = (0, L/5)$  et où  $a$  et  $b$  sont constants sur leurs supports. On obtient la figure suivante, qui représente  $t \mapsto \ln(E(t))$  pour différentes valeurs de  $a$  et  $b$ . On peut voir que quand il n'y a pas de feedback ( $a = b = 0$ ), l'énergie est exponentiellement décroissante, et si le feedback sans retard augmente ( $a = 1$  et  $b = 0$ ), l'énergie décroît exponentiellement plus vite. De plus si le coefficient du retard  $b$  augmente, alors l'énergie n'est pas exponentiellement décroissante, sauf si  $b$  est très petit (par exemple  $b = 0.1$ ) ou si  $b$  est plus petit que  $a$  ( $a = 4$ ,  $b = 1$ ). Plus précisément, avec  $a = 0$ ,  $b = 10$  ou  $a = b = 10$ , avant que le retard agisse ( $t < 2$ ), l'énergie décroît exponentiellement, ce qui n'est plus le cas quand  $b$  prend effet ( $t > 2$ ). Par conséquent la Figure 3.2 illustre les Théorèmes 3.2.3 et 3.2.6.

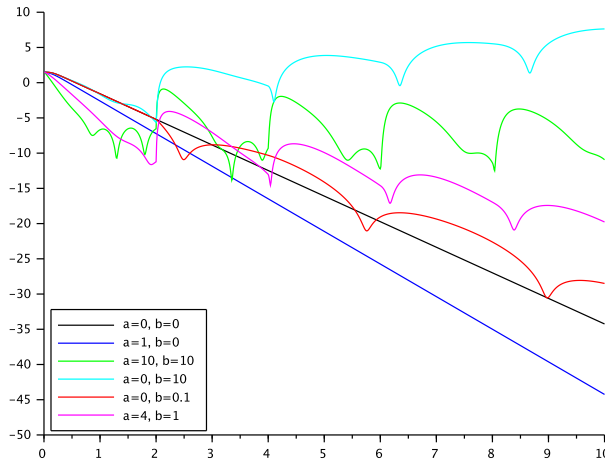


FIGURE 3.2 – Représentation de  $t \mapsto \ln(E(t))$  pour différentes valeurs de  $a$  et  $b$ .

Je finis cette section en considérant les cas des dampings à la fois internes et au bord dont un avec retard.

Le cas le plus simple est le cas où on a à la fois un feedback interne sans retard et un

feedback au bord avec retard, i.e.

$$\begin{cases} y_t(x, t) + y_{xxx}(x, t) + y_x(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) + a(x)y(x, t) = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t > 0, \\ y_x(L, t) = \beta y_x(0, t - h), & t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, L), \\ y_x(0, t) = z_0(t), & t \in (-h, 0), \end{cases}$$

où  $|\beta| < 1$  (voir [25] ou la Section 3.2.1), et où  $a$  est une fonction positive dans  $L^\infty(0, L)$  telle que  $a(x) \geq a_0 > 0$  p.p. dans  $\omega$ , un ensemble ouvert non vide de  $(0, L)$ . Dans ce cas, il suffit de combiner [113] et [25] (voir aussi la Section 3.2.1) pour obtenir la stabilité exponentielle locale pour toute longueur non critique.

Si nous considérons le cas d'un feedback interne avec retard et un feedback au bord sans retard, i.e.

$$\begin{cases} y_t(x, t) + y_{xxx}(x, t) + y_x(x, t) + y(x, t)y_x(x, t) + b(x)y(x, t - h) = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t > 0, \\ y_x(L, t) = \alpha y_x(0, t), & t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, L), \\ y(x, t) = z_0(x, t), & x \in (0, L), t \in (-h, 0), \end{cases} \quad (3.67)$$

où  $|\alpha| < 1$  (voir [144]), et où  $b$  est une fonction positive dans  $L^\infty(0, L)$  telle que  $b(x) \geq b_0 > 0$  p.p. dans  $\text{supp } b = \omega$  un ouvert non vide de  $(0, L)$  et où  $\|b\|_{L^\infty(0, L)}$  est assez petit, alors nous pouvons adapter la méthode utilisée pour démontrer le Théorème 3.2.6 pour obtenir la stabilité exponentielle locale pour tout  $L < \sqrt{3}\pi$ . Notons que l'on peut prendre  $\alpha = 0$  ici.

Une question intéressante est d'enlever l'hypothèse technique (3.52) dans le Théorème 3.2.6 ou pour (3.67). Un autre sujet de recherche futur pourrait être l'étude de la stabilité de l'équation de KdV avec un retard dans le terme non linéaire, ce qui peut sembler plus naturel, c'est à dire considérer

$$\begin{cases} y_t(x, t) + y_{xxx}(x, t) + y_x(x, t) + a(x)y(x, t) + y(x, t - h)y_x(x, t) = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ y(0, t) = y(L, t) = y_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, L), \\ y(x, t) = z_0(x, t), & x \in \omega, t \in (-h, 0). \end{cases}$$

L'énergie définie par  $E(t) = \int_0^L y^2(x, t)dx$  satisfait alors

$$\frac{d}{dt} E(t) = -y_x^2(0, t) - 2 \int_0^L a(x)y^2(x, t)dx - 2 \int_0^L y(x, t)y(x, t - h)y_x(x, t)dx,$$

et gérer le dernier terme de cette inégalité ne semble pas évident.

Enfin, à court terme, il pourrait être intéressant de considérer un retard dépendant du temps dans le feedback (interne ou au bord), c'est à dire  $h = h(t)$ , en s'inspirant des études de la Section 3.1.2. Nous pourrions alors comparer les résultats et vérifier si la décroissance exponentielle est toujours robuste par rapport au retard dépendant du temps dans le cas de feedback au bord, ce qui n'est pas le cas pour les feedbacks internes sauf si le poids du feedback avec retard est assez petit par rapport au poids du feedback sans retard. J'ai proposé ce sujet à Chahnaz Timimoun (Oran, Algérie), qui est venue en stage sous ma direction à l'IECL en juillet 2019.

### 3.3 Observateurs pour un modèle linéaire de dynamique de population structurée en âge et avec diffusion spatiale

Nous allons maintenant considérer un modèle linéaire de population structurée en âge avec diffusion spatiale, décrit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t p(a, x, t) + \partial_a p(a, x, t) & a \in (0, a^*), x \in \Omega, t > 0, \\ = -\mu(a)p(a, x, t) + k\Delta p(a, x, t), & \\ p(a, x, t) = 0, & a \in (0, a^*), x \in \partial\Omega, t > 0, \\ p(a, x, 0) = p_0(a, x), & a \in (0, a^*), x \in \Omega, \\ p(0, x, t) = \int_0^{a^*} \beta(a)p(a, x, t)da, & x \in \Omega, t > 0. \end{array} \right. \quad (3.68)$$

Dans les équations précédentes :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) est un domaine borné régulier,  $k$  est le coefficient de diffusion qui est constant et positif, et  $\Delta$  est le Laplacien par rapport à la variable d'espace  $x$  ;
- $p(a, x, t)$  est la densité de la population à l'âge  $a$ , à la position spatiale  $x \in \Omega$ , au temps  $t > 0$  ;
- $p_0$  est la densité initiale ;
- $a^* \in (0, +\infty)$  est l'espérance de vie maximale ;
- $\beta(a)$  et  $\mu(a)$  sont des fonctions positives représentant respectivement le taux de natalité et de mortalité, qui sont supposées être indépendantes de  $x$  (voir Figure 3.4 pour une représentation graphique typique de ces fonctions).

La dernière équation de (3.68), décrivant le processus de naissance, est aussi appelée *équation de renouvellement*. C'est une condition non locale, donnant une relation entre les nouveaux nés et les individus en âge de se reproduire, et qui peut être vu comme un terme de mémoire (ce n'est pas un terme de retard à proprement parler mais proche de celui-ci).

Nous supposons ici les conditions au bord (en espace) de Dirichlet homogènes, qui modélisent un habitat hostile à la frontière  $\partial\Omega$ , mais d'autres types de conditions au bord (en espace) peuvent aussi être considérés (typiquement les conditions au bord de Neumann homogènes qui correspondent à une population isolée, i.e. annulant les flux entrants et sortants).

Nous faisons les hypothèses classiques suivantes sur  $\beta$  et  $\mu$  (voir, par exemple, [41]) :

- $(\mathbf{H}_\beta)$   $\beta \in L^\infty(0, a^*)$ ,  $\beta \geq 0$  p.p. dans  $(0, a^*)$  ;
- $(\mathbf{H}_\mu)$   $\mu \in L^1_{\text{loc}}(0, a^*)$ ,  $\mu \geq 0$  p.p. dans  $(0, a^*)$  et

$$\lim_{a \rightarrow a^*} \int_0^a \mu(s)ds = +\infty. \quad (3.69)$$

Nous introduisons la fonction

$$\Pi(a) := \exp \left( - \int_0^a \mu(s)ds \right)$$

qui représente la probabilité de survie à l'âge  $a$ . C'est une fonction décroissante satisfaisant (par la condition (3.69))

$$\lim_{a \rightarrow a^*} \Pi(a) = 0. \quad (3.70)$$

Je vais maintenant donner quelques rappels concernant le système (3.68), on peut par exemple référer à [41]. En utilisant une formulation semi-groupe, nous pouvons écrire le problème (3.68) dans la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = Ap(t), & t \in (0, T), \\ p(0) = p_0, \end{cases} \quad (3.71)$$

où  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  est le générateur d'un  $C_0$  semi-groupe sur un espace de Hilbert  $X := L^2((0, a^*) \times \Omega)$  défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in X \cap L^2\left((0, a^*), H_0^1(\Omega)\right) \mid -\frac{\partial \varphi}{\partial a} - \mu \varphi + k \Delta \varphi \in X; \right. \\ \left. \varphi(a, \cdot)|_{\partial \Omega} = 0 \text{ pour presque tout } a \in (0, a^*); \right. \\ \left. \varphi(0, x) = \int_0^{a^*} \beta(a) \varphi(a, x) da \text{ pour presque tout } x \in \Omega \right\} \\ A\varphi = -\partial_a \varphi - \mu \varphi + k \Delta \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

On rappelle ici quelques résultats sur le spectre de  $A$ , on réfère à [41] pour plus de détails :

- L'opérateur  $A$  est à résolvante compacte et son spectre est formé d'un ensemble dénombrable (infini) de valeurs propres isolées avec multiplicités algébriques finies.
- Les valeurs propres de  $A$  sont données par

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda_i^0 - k \lambda_j^D \mid i, j \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad (3.72)$$

où  $(\lambda_n^D)_{n \geq 1}$  est la suite croissante positive des valeurs propres du Laplacien avec conditions au bord de Dirichlet et  $(\lambda_n^0)_{n \geq 1}$  est la suite des valeurs propres de l'opérateur sans diffusion ( $k = 0$ ), qui sont les solutions de l'équation caractéristique

$$F(\lambda) := \int_0^{a^*} \beta(a) e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(s) ds} da = 1. \quad (3.73)$$

- $A$  a une valeur propre réelle dominante  $\lambda_1$ , qui est simple :

$$\lambda_1 = \lambda_1^0 - k \lambda_1^D > \operatorname{Re}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \lambda_1.$$

- L'espace propre associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  est donné par

$$\operatorname{Vect} \left\{ e^{-\lambda_i^0 a - \int_0^a \mu(s) ds} \varphi_j^D(x) \mid \lambda_i^0 - k \lambda_j^D = \lambda \right\} \quad (3.74)$$

où  $(\varphi_n^D)_{n \geq 1}$  est une base orthonormée de  $L^2(\Omega)$  constitué des fonctions propres du Laplacien avec conditions au bord de Dirichlet.

- Toute bande verticale du plan complexe contient un nombre fini de valeurs propres de  $A$ .
- Le semi-groupe  $e^{tA}$  engendré sur  $X$  par  $A$  est compact pour  $t \geq a^*$ , ce qui implique en particulier que la stabilité exponentielle de  $e^{tA}$  est équivalente à la condition  $\omega_0(A) := \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A) \} < 0$  (voir [143], Section 2).

On note par  $M$  le nombre de valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicités (c'est à dire que l'on répète les valeurs propres selon leurs multiplicités) avec partie réelle positive ou nulle :

$$\cdots \leq \operatorname{Re} \lambda_{M+1} < 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_M \leq \cdots \leq \operatorname{Re} \lambda_2 < \lambda_1.$$

Nous allons considérer dans la suite deux problèmes inverses et la construction de deux observateurs distincts. Nous rappelons que les observateurs ont été introduits par Luenberger [99] pour estimer l'état de systèmes dynamiques de dimension finie à partir de la

connaissance d'une sortie (bien évidemment en supposant que l'état initial est inconnu). Grosso modo, un observateur est un système dynamique auxiliaire qui utilise comme entrée les mesures disponibles (qui est la sortie du système d'origine) et converge asymptotiquement (en temps) vers l'état du système d'origine. La généralisation d'un observateur (aussi appelé estimateur ou filtre dans le cadre stochastique) aux systèmes de dimension infinie a été faite dans les années 1980 (voir par exemple [19, 80, 42] et [73] pour un état de l'art des observateurs dans le contexte de systèmes distribués). Les observateurs ont été utilisés pour résoudre des problèmes d'assimilation de données en géophysique ([12]), de reconstruction de données initiales ([120]) et d'identification de paramètres ([102])...

### 3.3.1 Observateur d'état

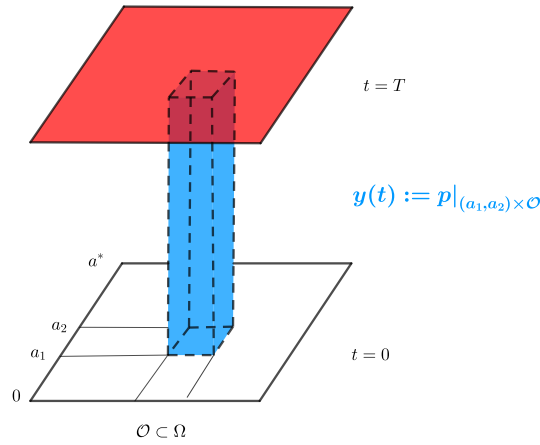


FIGURE 3.3 – Comment estimer  $p(T)$  quand  $T \rightarrow +\infty$  à partir de la connaissance de  $y(t)$  pour  $t \in (0, T)$  ?

Dans cette partie, nous étudions le problème inverse suivant (voir Figure 3.3), qui correspond à l'article [119] ([RTV16]) écrit en collaboration avec Karim Ramdani (Inria Nancy) et Marius Tucsnak (Bordeaux) :

*Supposant que la densité initiale  $p_0$  est inconnue, mais connaissant la densité*

$$y(a, x, t) := p(a, x, t), \quad t \in (0, T), \quad a \in (a_1, a_2), \quad x \in \mathcal{O},$$

*où  $\mathcal{O}$  est un sous-ensemble donné de  $\Omega$  et  $0 \leq a_1 < a_2 \leq a^*$ , est-il possible, et comment, d'estimer quand  $T \rightarrow +\infty$  la densité  $p(a, x, T)$ , pour  $x \in \Omega$  et  $a \in (0, a^*)$  ?*

Nous donnons une réponse positive à cette question et nous proposons un algorithme de reconstruction efficace. Basée sur une formulation semi-groupe, notre méthode utilise de manière cruciale deux ingrédients principaux : les observateurs de Luenberger [99] et le fait que le problème a un nombre fini de valeurs propres instables (i.e. des valeurs propres  $\lambda$  telles que  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ) [41]. Plus précisément, je vais décrire de manière formelle les principales idées de notre méthode de reconstruction.

En utilisant une formulation semi-groupe, on réécrit tout d'abord le système (3.68) sous la forme abstraite (3.71). De même, l'observation disponible peut être formulée en utilisant un opérateur d'observation borné  $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ , où  $Y := L^2((a_1, a_2) \times \mathcal{O})$ , défini par

$$C\varphi = \varphi|_{(a_1, a_2) \times \mathcal{O}} \quad (\varphi \in X), \quad (3.75)$$



avec pour sortie

$$y(t) = Cp(t), \quad t \in (0, T). \quad (3.76)$$

On définit l'observateur de type Luenberger comme la solution  $\hat{p}$  du système suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{p}}(t) = A\hat{p}(t) + L(C\hat{p}(t) - y(t)), & t \in (0, T), \\ \hat{p}(0) = 0, \end{cases} \quad (3.77)$$

où  $L \in \mathcal{L}(Y, X)$  est un opérateur linéaire choisi de manière à ce que  $A + LC$  engendre un semi-groupe exponentiellement stable sur  $X$ . En effet, puisque l'erreur  $e := \hat{p} - p$  satisfait par construction

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t), \quad t \in (0, T),$$

cette condition assure que  $e(T)$  converge de manière exponentielle vers 0, i.e. que  $(\|\cdot\|$  étant la norme sur  $X$ )

$$\|\hat{p}(T) - p(T)\| \leq Me^{-\omega T} \|p_0\|,$$

montrant que  $\hat{p}(T)$  constitue une approximation de  $p(T)$  quand  $T \rightarrow +\infty$ . Remarquons que  $\hat{p}(T)$  peut être calculé (en résolvant (3.77)) exclusivement à partir de la connaissance de l'observation  $y(t)$ , à condition que nous ayons déterminé l'opérateur d'injection de sortie stabilisant  $L$ .

Pour déterminer cet opérateur, nous utilisons le deuxième ingrédient principal de notre méthode : le fait que  $A$  a un nombre fini de valeurs propres instables. Suivant Triggiani [131, 132], nous montrons que l'opérateur  $L$  peut être facilement déduit de l'opérateur de dimension finie  $L^M$  stabilisant le système de dimension finie  $(A^M, C^M)$ , où  $A^M$  est la restriction de  $A$  au sous-espace  $X^M$  de  $X$  engendré par les fonctions propres (généralisées) instables de  $A$  et  $C^M$  est l'opérateur d'observation correspondant.

### Détectabilité de systèmes de dimension infinie avec un nombre fini de valeurs propres instables.

Je vais détailler cette méthode en me plaçant dans un cadre abstrait. Soit  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  un opérateur linéaire avec résolvante compacte sur un espace de Hilbert  $X$  engendrant un  $C_0$  semi-groupe dans  $X$ , et soit  $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ , où  $Y$  est un espace de Hilbert. On suppose que  $A$  satisfait les hypothèses suivantes :

- (A1.)  $A$  admet  $M$  valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) avec partie réelle plus grande ou égale à 0. Plus précisément, nous pouvons ordonner les valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $A$  pour que la suite  $(\operatorname{Re} \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  soit décroissante, et nous supposons que  $M \in \mathbb{N}^*$  est tel que

$$\dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{M+1} < 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_M \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \operatorname{Re} \lambda_1.$$

- (A2.) Nous avons l'égalité

$$\omega_a(A) = \omega_0(A)$$

où  $\omega_a(A) := \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|e^{tA}\|$  est la borne de croissance de  $e^{tA}$  et  $\omega_0(A) := \sup \{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$  la borne spectrale de  $A$ .

Remarquons que l'hypothèse (A2.) est en particulier satisfaite si  $e^{tA}$  est un semi-groupe analytique ou si  $e^{tA}$  est compact pour un  $t$  (voir [143, p. 252]).

**Définition 3.3.1** La paire  $(A, C)$  est détectable si il existe  $L \in \mathcal{L}(Y, X)$  tel que  $(A + LC)$  engendre un semi-groupe exponentiellement stable. Un tel opérateur  $L$  est appelé un opérateur d'injection de sortie stabilisant pour  $(A, C)$ .

Notre but est ici de montrer que la détectabilité du système de dimension infinie  $(A, C)$  peut être obtenue par la détectabilité du système de dimension finie correspondant à la partie instable de  $A$  (à savoir la projection sur l'espace de dimension finie associé aux valeurs propres instables  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ ) à condition qu'une hypothèse de type Hautus soit vérifiée. Ces résultats peuvent être vus comme le dual de ceux obtenus dans [131] pour la stabilisation de systèmes de dimension infinie ayant un nombre fini de valeurs propres instables. Cette approche a été utilisée pour le contrôle et la stabilisation de systèmes paraboliques [47], en particulier en dynamiques des fluides [15, 16, 20, 122].

Nous posons  $\Sigma^M := \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$  l'ensemble des valeurs propres instables de  $A$  et soit  $\Gamma^M$  une courbe orientée positivement entourant  $\Sigma^M$  mais pas d'autre point du spectre  $\sigma(A)$  de  $A$ . Soit  $P^M : X \rightarrow X$  l'opérateur de projection défini par

$$P^M := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^M} (\zeta - A)^{-1} d\zeta. \quad (3.78)$$

On pose  $X^M := P^M X$  et  $X_-^M := (Id - P^M)X$ , et donc  $P^M$  fournit la décomposition de  $X$  suivante

$$X = X^M \oplus X_-^M.$$

De plus  $X^M$  et  $X_-^M$  sont des sous-espaces invariants par  $A$  (car  $A$  et  $P^M$  commutent) et le spectre des opérateurs restreints  $A|_{X^M}$  et  $A|_{X_-^M}$  est respectivement  $\Sigma^M$  et  $\sigma(A) \setminus \Sigma^M$  (voir [84]). On pose aussi

$$A^M := A|_{\mathcal{D}(A) \cap X^M} : \mathcal{D}(A) \cap X^M \rightarrow X^M \quad \text{et} \quad A_-^M := A|_{\mathcal{D}(A) \cap X_-^M} : \mathcal{D}(A) \cap X_-^M \rightarrow X_-^M.$$

**Remarque 3.3.1** Si  $A^M := A|_{\mathcal{D}(A) \cap X^M}$  est diagonalisable, alors l'espace  $X^M = P^M X$  est l'espace de dimension finie engendré par les fonctions propres de  $A$  associées aux valeurs propres instables

$$X^M = \bigoplus_{k=1}^M \text{Ker}(A - \lambda_k) \quad (3.79)$$

et  $\dim X^M = M$ .

Dans le cas général, l'espace  $X^M$  est l'espace de dimension finie engendré par les fonctions propres généralisées de  $A$  associées aux valeurs propres instables. La dimension de  $X^M$  est la somme des multiplicités algébriques.

On peut alors énoncer le résultat abstrait suivant.

**Théorème 3.3.1** Soit  $Q^M : Y \rightarrow Y^M := CX^M$  l'opérateur de projection orthogonale de  $Y$  vers  $Y^M$ ,  $i_{X^M} : X^M \rightarrow X$  l'opérateur d'injection de  $X^M$  dans  $X$  et soit

$$C^M = Ci_{X^M} \in \mathcal{L}(X^M, Y^M). \quad (3.80)$$

Supposons que le système projeté de dimension finie  $(A^M, C^M)$  est détectable à travers un opérateur d'injection de sortie stabilisant  $L^M \in \mathcal{L}(Y^M, X^M)$ . Alors, le système de dimension infinie  $(A, C)$  est détectable à travers l'opérateur d'injection de sortie stabilisant

$$L = i_{X^M} L^M Q^M \in \mathcal{L}(Y, X). \quad (3.81)$$

Le résultat suivant donne une condition suffisante de type Hautus pour avoir la détectabilité du système projeté de dimension finie  $(A^M, C^M)$ .

**Proposition 3.3.1** Si le test de Hautus

$$(\varphi \in \mathcal{D}(A) \mid A\varphi = \lambda\varphi \text{ pour } \lambda \in \Sigma^M \text{ et } C\varphi = 0) \implies \varphi = 0 \quad (3.82)$$

est vérifié, alors  $(A^M, C^M)$  est détectable.

En combinant le Théorème 3.3.1 et la Proposition 3.3.1, nous obtenons le résultat suivant.

**Corollaire 3.3.1** *Si le test de Hautus (3.82) est vérifié, alors  $(A, C)$  est détectable à travers l'opérateur d'injection de sortie stabilisant  $L$  défini par (3.81).*

**Le cas  $A^M = A|_{\mathcal{D}(A) \cap X^M}$  diagonalisable.** Nous pouvons alors donner une expression explicite de  $L^M$  et de  $L$ . On note par  $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq M}$  une base de  $X^M$ . Les valeurs propres de  $A^*$  sont données par les complexes conjugués  $\bar{\lambda}_k$  des valeurs propres  $\lambda_k$  de  $A$  et ont les mêmes multiplicités algébriques et géométriques. Notons par  $\psi_k$  une fonction propre de  $A^*$  correspondant à la valeur propre instable  $\bar{\lambda}_k$  ( $1 \leq k \leq M$ ). On peut montrer (voir [20, p. 1453]) que la famille  $(\psi_k)_{1 \leq k \leq M}$  peut être choisie de manière à ce que  $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq M}$  et  $(\psi_k)_{1 \leq k \leq M}$  forment une suite bi-orthogonale, au sens où  $(\varphi_k, \psi_m)_X = \delta_{km}$ . Il suit que l'opérateur de projection  $P^M \in \mathcal{L}(X, X^M)$  défini par (3.78) peut s'exprimer comme

$$P^M z = \sum_{k=1}^M (z, \psi_k)_X \varphi_k \quad (z \in X). \quad (3.83)$$

Comme

$$X^M = P^M X = \text{Vect} \{ \varphi_k, 1 \leq k \leq M \},$$

il suit que

$$Y^M = C X^M = \text{Vect} \{ C \varphi_k, 1 \leq k \leq M \}.$$

Supposons maintenant que la famille

$$(C \varphi_k)_{1 \leq k \leq M} \text{ soit linéairement indépendante dans } X. \quad (3.84)$$

D'après [20, p. 1458], cette hypothèse est vérifiée pour un système de dimension infinie d'EDP d'évolution, avec observation interne (et peut être prouvée dans notre cas de dynamique de population). Cela implique que le test de Hautus (3.82) est nécessairement vérifié et que :

$$\dim Y^M = \dim X^M = M.$$

Notons par  $G$  la matrice Hermitienne de taille  $M \times M$  définie par

$$G = \left( (C \varphi_i, C \varphi_j)_Y \right)_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M}. \quad (3.85)$$

Il n'est pas difficile de prouver que (3.84) est équivalente au fait que  $G$  est inversible. On peut alors exprimer l'opérateur de projection orthogonale  $Q^M : Y \rightarrow Y^M = C X^M$  comme suit (remarquons que  $(C \varphi_k)_{1 \leq k \leq M}$  n'est pas une famille orthogonale).

**Lemme 3.3.1** *Soit  $G$  la matrice définie par (3.85) et supposons (3.84). Alors, pour tout  $y \in Y$ ,  $Q^M y$  est défini par*

$$Q^M y = \sum_{i=1}^M (y, \eta_i)_Y C \varphi_i, \quad (3.86)$$

où

$$\eta_i = \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} C \varphi_j \quad \text{et} \quad (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M} = G^{-1}. \quad (3.87)$$

L'opérateur (de dimension finie)  $C^M \in \mathcal{L}(X^M, Y^M)$  défini par (3.80) satisfait  $C^M \varphi_k = C \varphi_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, M\}$ . Remarquons que  $C^M$  n'est rien d'autre que la matrice identité quand nous choisissons comme bases pour  $X^M$  et  $Y^M$  respectivement  $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq M}$  et

### 3.3. OBSERVATEURS POUR UN MODÈLE LINÉAIRE DE DYNAMIQUE DE POPULATION STRUCTURÉE EN ÂGE ET A

$(C\varphi_k)_{1 \leq k \leq M}$ . Par conséquent, en utilisant ces bases,  $A^M + L^M C^M$  est une matrice de Hurwitz si  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M) + L^M$  est Hurwitz. Il est alors suffisant de prendre  $L^M = -\sigma Id$  avec

$$\sigma > \text{Re } \lambda_1$$

pour obtenir la stabilité de  $A^M + L^M C^M$ .

L'opérateur correspondant  $L \in \mathcal{L}(Y, X)$  défini par (3.81) satisfait, pour tout  $y \in Y$

$$Ly = L^M Q^M y = L^M \left( \sum_{i=1}^M (y, \eta_i)_Y C\varphi_i \right) = -\sigma \sum_{i=1}^M (y, \eta_i)_Y \varphi_i,$$

et le Théorème 3.3.1 implique que  $A + LC$  engendre un semi-groupe exponentiellement stable. On résume ce résultat utile dans le corollaire suivant.

**Corollaire 3.3.2** *Supposons que  $A^M := A|_{\mathcal{D}(A) \cap X^M}$  est diagonalisable et soit  $M$  le nombre de valeurs propres instables de  $A$  comptées avec multiplicités. On note par  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq M}$  une base de  $X^M$  et supposons que la famille  $\{C\varphi_i, 1 \leq i \leq M\}$  est linéairement indépendante dans  $X$ . Etant donné  $\sigma > \text{Re } \lambda_1$ , soit  $L \in \mathcal{L}(Y, X)$  défini par*

$$Ly = -\sigma \sum_{i=1}^M (y, \eta_i)_Y \varphi_i, \quad (3.88)$$

où  $\eta_i, i = 1, \dots, M$ , est défini dans le Lemma 3.3.1. Alors  $A + LC$  engendre un semi-groupe exponentiellement stable sur  $X$ .

**Détectabilité et observateur pour le système de dynamique de population.** Les hypothèses (A1.) et (A2.) sont satisfaites pour (3.68) et on peut vérifier le test de Hautus de la Proposition 3.3.1 (voir [119]). Remarquons que l'on peut également prouver ce résultat quand le coefficient de diffusion dépend de manière analytique de l'âge.

Par le Corollaire 3.3.2, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 3.3.2** *Soit  $p_0 \in X$  et  $p$  la solution de (3.68). Supposons que  $y(t) = p|_{(a_1, a_2) \times \mathcal{O}}$  ( $t > 0$ ) est connu. Soit  $\hat{p}$  l'observateur défini par (3.77), où  $L \in \mathcal{L}(Y, X)$  est l'opérateur d'injection de sortie stabilisant (de dimension finie) défini par (3.81). Alors, il existe  $C > 0$  et  $\omega > 0$  tels que*

$$\|\hat{p}(t) - p(t)\| \leq Ce^{-\omega t} \|p_0\|, \quad t > 0.$$

Enfin, dans le cas où  $A^M = A|_{\mathcal{D}(A) \cap X^M}$  est diagonalisable, nous pouvons montrer (voir aussi [20, p. 1458]) que (3.84) est vérifiée. Par conséquent, dans le cas où  $A^M$  est diagonalisable,  $L$  peut s'écrire sous la forme (3.88).

Ce résultat peut s'étendre à d'autres opérateurs d'observation :

**Remarque 3.3.2** *Etant donné  $a_1, a_2$  avec  $0 \leq a_1 < a_2 \leq a^*$ , on peut prendre  $Y = L^2(\mathcal{O})$  et  $C \in \mathcal{L}(X, Y)$  défini par*

$$(C\varphi)(x) = \int_{a_1}^{a_2} \varphi(a, x) da, \quad \varphi \in X, x \in \mathcal{O} \quad (3.89)$$

car le test de Hautus est également vérifié. Cet opérateur d'observation défini par (3.89) est clairement d'un intérêt biologique car mesurer  $y = Cp$  signifie compter la population ayant un âge dans l'intervalle  $(a_1, a_2)$  et localisé dans le domaine spatial  $\mathcal{O}$ .

Un autre choix possible d'opérateur d'observation, qui peut être vu comme un cas limite de l'opérateur défini dans (3.75), est

$$(C\varphi)(x) = \varphi(a_0, x), \quad \varphi \in X, x \in \mathcal{O}, \quad (3.90)$$

où  $a_0 \in (0, a^*)$  est un âge fixé.

Remarquons aussi que l'argument utilisé pour montrer l'observabilité des fonctions propres dans ce cas (et donc pour l'opérateur d'observation (3.75)) peut être utilisé, sans modification, dans le cas  $\mu = \mu(a, x)$  et  $\beta = \beta(a, x)$  (modélisant des routes de migration, de maladie,...), car les hypothèses (A1.) et (A2.) sont satisfaites dans ce cas (voir par exemple [70]).

### Résultats numériques.

Prenons  $\Omega = (0, \pi)$  et en supposant que  $p_0$  est une donnée initiale inconnue, nous voulons estimer  $p$  au temps  $t = T$  où  $p$  résout

$$\begin{cases} \partial_t p(a, x, t) + \partial_a p(a, x, t) + \mu(a) p(a, x, t) - k \partial_{xx} p(a, x, t) = 0, & a \in (0, a^*), x \in (0, \pi), t > 0, \\ p(a, 0, t) = p(a, \pi, t) = 0, & a \in (0, a^*), t > 0, \\ p(a, x, 0) = p_0(a, x), & a \in (0, a^*), x \in (0, \pi), \\ p(0, x, t) = \int_0^{a^*} \beta(a) p(a, x, t) da, & x \in (0, \pi), t > 0, \end{cases} \quad (3.91)$$

à condition de connaître l'observation

$$y(t) = p(t)|_{(a_1, a_2) \times (\ell_1, \ell_2)}, \quad t \in (0, T),$$

où  $0 \leq a_1 < a_2 \leq a^*$  et  $0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq \pi$ .

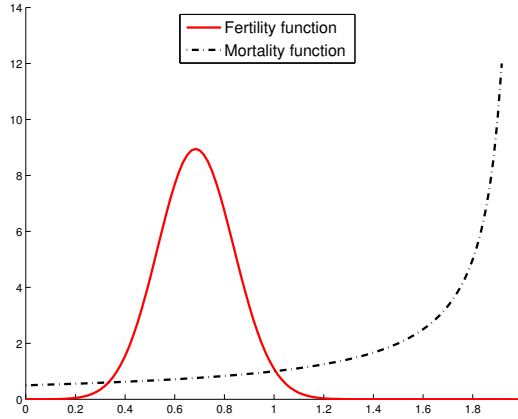


FIGURE 3.4 – Les fonctions de fertilité et de mortalité.

En prenant  $a^* = 2$ , nous choisissons la fonction de fertilité (voir Figure 3.4)

$$\beta(a) = 10 a(a^* - a) \exp \left\{ -20(a - a^*/3)^2 \right\},$$

tandis que la fonction de mortalité est choisie comme

$$\mu(a) = (a^* - a)^{-1}.$$

Avec ce choix particulier de  $\mu$ , la fonction  $\Pi(a)$  peut être calculée explicitement :

$$\Pi(a) = \exp \left( - \int_0^a \mu(s) ds \right) = \frac{a^* - a}{a^*}.$$

### 3.3. OBSERVATEURS POUR UN MODÈLE LINÉAIRE DE DYNAMIQUE DE POPULATION STRUCTURÉE EN ÂGE ET A

Le temps d'observation est  $T = 2a^*$  et le coefficient de diffusion est  $k = 1$ . Sous ces hypothèses, il y a une unique valeur propre instable  $\lambda_1 = \lambda_1^0 - 1$ , où  $\lambda_1^0$  est l'unique solution réelle de l'équation caractéristique (3.73). En calculant explicitement cette valeur, on trouve  $\lambda_1 = 0.239$ .

Le sous-espace instable est l'espace de dimension 1

$$X_+ = \text{Ker}(A - \lambda_1) = \text{Vect}\{\varphi_1\} = \text{Vect}\left\{\varphi_1^0(a)\varphi_1^D(x)\right\}.$$

L'observateur défini par (3.77) demande un opérateur d'injection de sortie stabilisant  $L$  défini par (3.88)

$$Ly = -\sigma(y, \eta_1)_Y \varphi_1 \quad (y \in Y),$$

où  $\sigma > \lambda_1$  (coefficient de gain) et (voir (3.87))

$$\eta_1 = \alpha_{11}C\varphi_1 = \frac{C\varphi_1}{\|C\varphi_1\|_Y^2}.$$

L'observateur résout alors le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \hat{p}(a, x, t) + \partial_a \hat{p}(a, x, t) + \mu(a) \hat{p}(a, x, t) - k \partial_{xx} \hat{p}(a, x, t) \\ \quad + \sigma(C\hat{p}, \eta_1)_Y \varphi_1(a, x) = \sigma(y, \eta_1)_Y \varphi_1(a, x), & a \in (0, a^*), x \in (0, \pi), t > 0, \\ \hat{p}(a, 0, t) = \hat{p}(a, \pi, t) = 0, & a \in (0, a^*), t > 0, \\ \hat{p}(a, x, 0) = 0, & a \in (0, a^*), x \in (0, \pi), \\ \hat{p}(0, x, t) = \int_0^{a^*} \beta(a) \hat{p}(a, x, t) da, & x \in (0, \pi), t > 0. \end{array} \right. \quad (3.92)$$

Afin de valider numériquement notre méthode de reconstruction, nous discrétisons les systèmes (3.91) et (3.92) par différences finies.

Pour les deux problèmes, une des principales difficultés vient de la discrétisation de l'équation de renouvellement  $p(0, x, t) = \int_0^{a^*} \beta(a)p(a, x, t)da$  apparaissant dans le domaine de l'opérateur. En effet, cette condition non locale couple les inconnues correspondant aux différents âges pour un temps donné et à un point donné de l'espace. Dans [74], Huyer surmonte ce problème en proposant une reformulation du système dans lequel cette condition est prise en compte en ajoutant un terme de Dirac dans l'EDP d'évolution définissant la dynamique. Ici, nous utilisons la même approche que dans [51], dans lequel l'équation de renouvellement est simplifiée via la discrétisation en temps : la densité de population à l'âge 0 pour un temps  $t^n$  donné est évaluée en utilisant les valeurs de la densité pour tous les âges au temps précédent  $t^{n-1}$ .

Une autre difficulté vient du comportement singulier du coefficient de mortalité  $\mu$  (voir l'équation (3.69)), on suit alors [51] et on introduit la variable auxiliaire

$$u(a, x, t) = \frac{p(a, x, t)}{\Pi(a)} = \exp\left(\int_0^{a^*} \mu(s)ds\right) p(a, x, t).$$

Une dernière difficulté vient de la présence du terme  $(C\hat{p}, \eta_1)_Y$  dans l'équation de l'observateur (3.92). On introduit pour cela la nouvelle inconnue  $\theta_1(t) = (C\Pi\hat{u}, \eta_1)_Y$  qui satisfait

$$\dot{\theta}_1(t) = -(C\Pi\partial_a \hat{u}, \eta_1)_Y + k(C\Pi\partial_{xx} \hat{u}, \eta_1)_Y - \sigma\theta_1(t) + \sigma(y, \eta_1)_Y, \quad \theta_1(0) = 0.$$

Tous les tests numériques présentés ci-après sont de dimension deux et ont été réalisés sur Matlab.

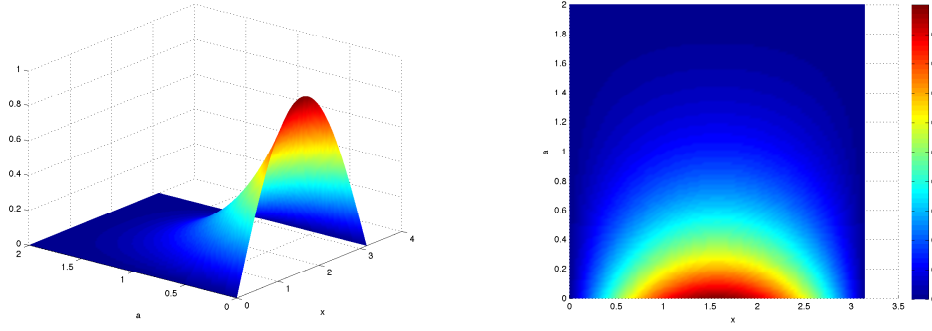


FIGURE 3.5 – Donnée initiale correspondant à la première fonction propre (représentations 3D et 2D).

**Observation distribuée en espace et observation totale en âge.** On considère une observation totale en âge (i.e.  $(a_1, a_2) = (0, a^*)$ ) et partielle en espace :  $(\ell_1, \ell_2) = (\pi/3, 2\pi/3)$ .

On choisit d'abord comme donnée initiale une fonction propre correspondant à l'unique valeur propre instable  $\lambda_1$  (voir Figure 3.5), i.e. on prend

$$p_0(a, x) = \varphi_1(a, x) = \varphi_1^0(a) \varphi_1^D(x) = \frac{a^* - a}{a^*} e^{-\lambda_1^0 a} \sin(x). \quad (3.93)$$

La solution du problème (3.91) est alors simplement donnée par

$$p(a, x, t) = e^{\lambda_1 t} p_0(a, x).$$

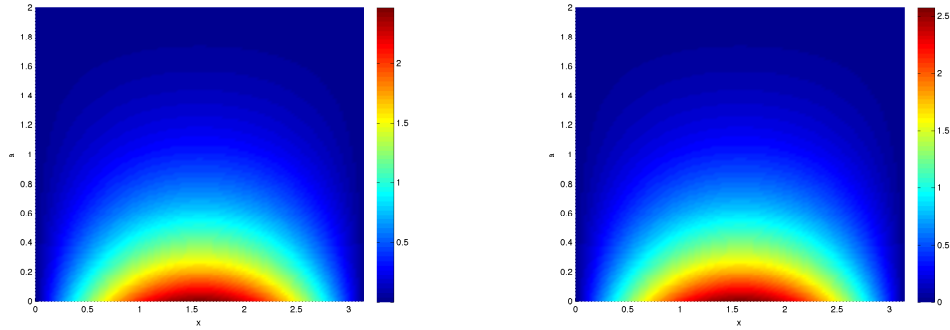


FIGURE 3.6 – Solutions estimée (à gauche) et exacte (à droite) au temps  $t = T$ .

Pour valider notre méthode de reconstruction, on génère d'abord numériquement une sortie en résolvant le problème (3.91) avec  $p_0$  donnée par (3.93). Pour éviter le phénomène de "crime inverse" [45, p. 154], on utilise des discrétisations en espace différentes pour générer la mesure et dans l'étape de reconstruction.

En prenant  $N_x = 100$  points de discrétisation en espace,  $N_a = 120$  points de discrétisation en âge et un pas de temps  $\Delta t = \Delta a/2$ , on obtient une erreur relative  $L^2$  de 4.07% (voir Figure 3.6 pour une représentation des solutions estimée et exacte). Dans ce test numérique, le coefficient de gain est choisi comme  $\sigma = 2 + \lambda_1$ .

On considère maintenant la situation plus réaliste d'observation avec bruit et de donnée

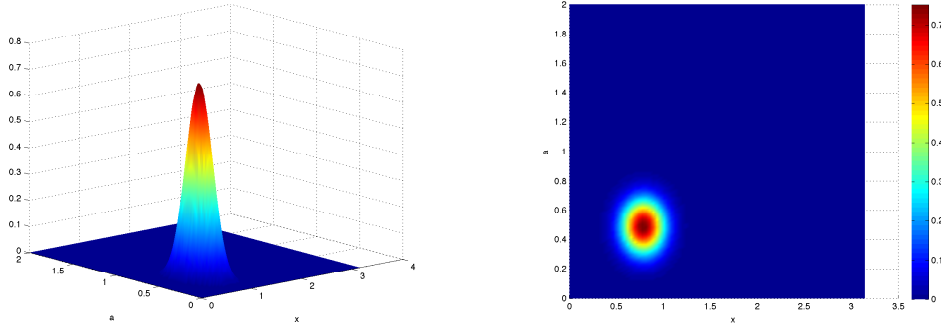


FIGURE 3.7 – Donnée initiale de type gaussien (représentation 3D et 2D).

initiale de type gaussien de la forme (voir Figure 3.7)

$$p_0(a, x) = \exp \left\{ - \left( 30(a - a^*/4)^2 + 20(x - \ell/4)^2 \right) \right\}.$$

Avec les mêmes paramètres de discrétisation, on obtient une erreur relative  $L^2$  de 2.99% avec 5% de bruit, 9.6% avec 10% de bruit et 16.3% avec 15% de bruit ; voir Figure 3.8 pour une représentation des solutions estimée et exacte au temps  $t = T$  dans le cas de 5% de bruit. La Figure 3.9 montre la décroissance de l'erreur sur l'état par rapport au temps.

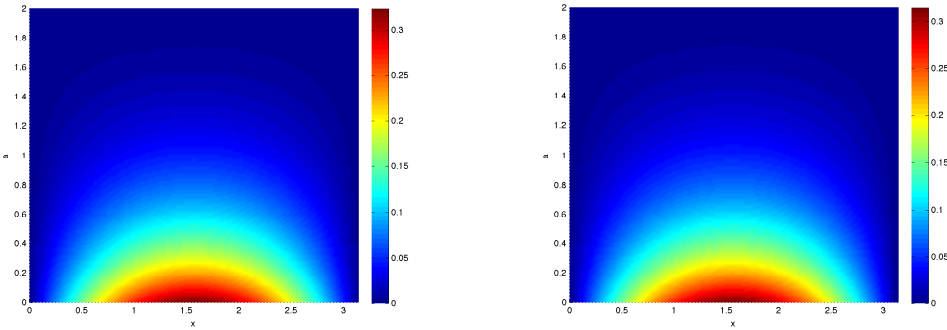


FIGURE 3.8 – Solutions estimée (à gauche) et exacte (à droite) au temps  $t = T$  (avec 5% de bruit).

On trace aussi en Figure 3.10 la population totale finale estimée et exacte<sup>1</sup> :  $P_T(x) = \int_0^{a^*} p(a, T, x) da$  et  $\hat{P}_T(x) = \int_0^{a^*} \hat{p}(a, T, x) da$ .

**Remarque 3.3.3** *Il n'est pas étonnant que les états finaux estimés obtenus par deux données initiales différentes (la première fonction propre et une de type gaussien) se ressemblent car le comportement asymptotique (en temps) des solutions de (3.68) est donné par la première valeur propre quand il y a seulement une valeur propre instable.*

De manière assez surprenante, la méthode de reconstruction est efficace même quand l'intervalle en espace d'observation  $(\ell_1, \ell_2)$  est petit. Plus précisément, pour  $N_x = 60$ ,  $N_a = 80$  et 10% de bruit, on obtient une erreur relative  $L^2$  – de 19.9% quand  $\ell_2 - \ell_1 = 3h$ ,  $h$  étant

1. Ici, ce que nous mentionnons comme solution “exacte” est une solution numérique, calculée en supposant les données initiales connues.



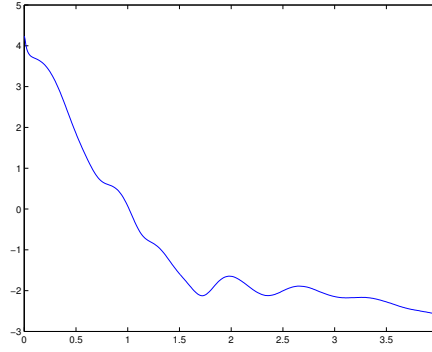


FIGURE 3.9 – Décroissance de l’erreur relative (échelle logarithmique) par rapport au temps (avec 5% de bruit).

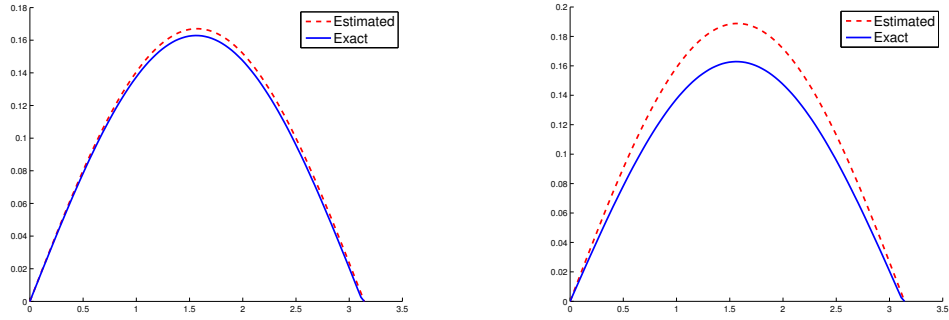


FIGURE 3.10 – Population totale estimée (ligne pointillée) et exacte au temps  $t = T$  avec 5% de bruit (à gauche) et 15% de bruit (à droite).

le pas de discrétisation (en espace). La même expérience est valable pour  $\ell_2 - \ell_1 = \ell/3$  amenant à une erreur relative de 9.1%.

**Observation distribuée en espace et en âge.** On considère maintenant le cas d’une observation locale en âge en prenant successivement  $(a_1, a_2) = (0, a^*/40)$  et  $(a_1, a_2) = (a^*/2, a^*)$ . L’intervalle d’observation en espace choisi dans les deux cas est  $(\ell/3, 2\ell/3)$  et on utilise un bruit de 5% sur les données initiales. Les erreurs relatives sur les états finaux sont alors respectivement de 3.3% et 38.8% (voir Figure 3.11). Ceci montre que la qualité de la reconstruction n’est pas influencée par la taille de l’intervalle d’observation en âge mais principalement par sa localisation. On peut obtenir une très bonne reconstruction si cet intervalle est localisé près de l’origine, même pour une observation ponctuelle (voir la Remarque 3.3.2). Ceci montre le rôle crucial joué par l’observation des naissances dans la qualité des observateurs.

**Influence du temps d’observation.** Dans le dernier test, on considère une configuration où il y a deux valeurs propres instables ( $\lambda_1 = 0.959$  et  $\lambda_2 = 0.119$ ). Ceci peut être fait en réduisant la valeur du coefficient de diffusion  $k = 0.28$ , et en prenant les mêmes paramètres que précédemment. L’intervalle d’observation en espace est choisi pour être  $(\ell/3, 2\ell/3)$  et  $(a_1, a_2) = (0, a^*/20)$ .

Pour  $T = a^*$ , l’observateur donne une bonne approximation de l’état final (l’erreur relative est de 3.83%), et même une meilleure approximation de la population totale (l’erreur relative est de 1.81%). Pour un temps d’observation  $T = 0.5a^*$ , l’estimation fournie par l’ob-

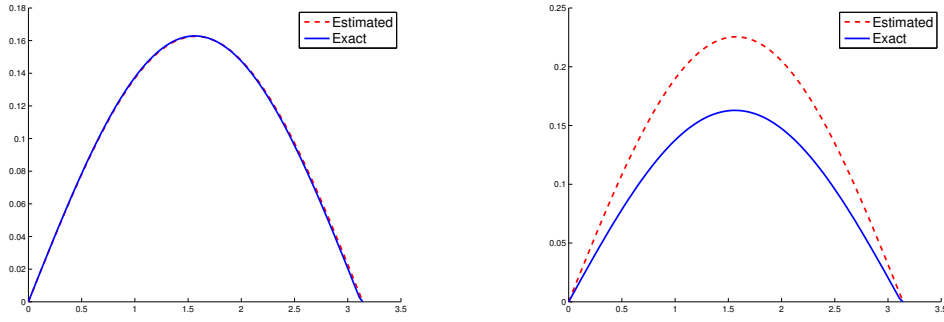


FIGURE 3.11 – Population totale exacte estimée (ligne pointillée) et exacte au temps  $t = T$  avec une observation en âge près de  $a = 0$  (à gauche) et loin de  $a = 0$  (à droite).

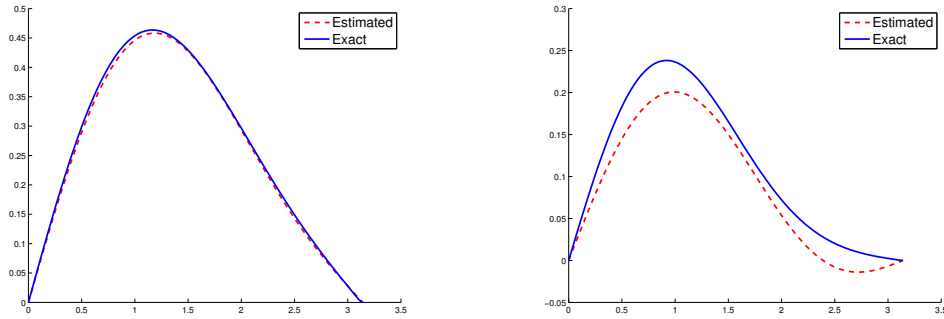


FIGURE 3.12 – Population totale estimée (ligne pointillée) et exacte en temps  $t = T$ , pour  $T = a^*$  (à gauche) et pour  $T = 0.5a^*$  (à droite).

servateur n'est pas très précise, l'erreur relative étant de 27%. Cependant, on obtient toujours une approximation raisonnable de la population totale, comme montré dans la Figure 3.12.

### 3.3.2 Observateur adaptatif

Dans cette seconde partie, qui correspond à l'article [121] ([RVV18]) écrit en collaboration avec Karim Ramdani et Jean-Claude Vivalda (Inria Nancy), nous supposons ici que le coefficient de diffusion  $k$  n'est pas bien connu. Pour être plus précis, nous supposons que  $k \in [k_0 - r_k, k_0 + r_k]$  où  $k_0$  (une valeur approchée de  $k$ ) et  $r_k$  (l'incertitude sur  $k$ ) sont connus.

On étudie alors le problème inverse suivant : *supposant la densité initiale  $p_0$  inconnue, mais connaissant la densité*

$$y(a, x, t) := p(a, x, t), \quad t \in (0, T), \quad a \in (a_1, a_2), \quad x \in \mathcal{O},$$

où  $\mathcal{O}$  est un ouvert non vide de  $\Omega$  et  $0 \leq a_1 < a_2 \leq a^*$ , peut-on estimer de manière simultanée :

- la densité  $p(a, x, T)$  quand  $T \rightarrow +\infty$ , pour  $x \in \Omega$  et  $a \in (0, a^*)$
- et le coefficient de diffusion  $k$  ?

La principale contribution de ce travail est d'étendre l'approche de [119] (correspondant à la Section 3.3.1) au cas où le coefficient de diffusion  $k$  est inconnu. Ceci est loin d'être trivial car les valeurs propres du système de dimension infinie sont alors inconnues (voir (3.72)). Cependant, on utilise le fait que les fonctions propres sont connues (voir (3.74)) et

ceci nous permet de construire un nouvel observateur en suivant une idée introduite par Kreisselmeier dans le contexte de la dimension finie dans [87] (voir aussi [86]). Remarquons que cet observateur demande plus de mesures que l'observateur proposé précédemment ([119]), car il utilise les sorties projetées non seulement sur les modes instables mais aussi sur un nombre fini de modes stables (voir (3.94)).

Les notations du début de la Section 3.3 sont toujours valables ici. On suppose de plus que  $A$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire (i.e. de partie réelle nulle). Pour résoudre notre problème d'estimation, on construit un observateur pour le système de dimension finie dans  $\mathbb{C}^M$  correspondant aux valeurs propres instables. Pour faire ceci, on a besoin d'utiliser un observateur venant non seulement des  $M$  modes instables, mais aussi d'autres modes stables. Plus précisément, prenons  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\operatorname{Re} \lambda_{N+1} < -3\lambda_1. \quad (3.94)$$

**Remarque 3.3.4** Par la formule (3.72), les valeurs propres  $\lambda_n = \lambda_i^0 - k\lambda_j^D$  vérifient

$$\operatorname{Re} \lambda_n \leq \operatorname{Re} \lambda_i^0 - (k_0 - r_k)\lambda_j^D, \quad \forall k \in [k_0 - r_k, k_0 + r_k].$$

Par conséquent, une telle valeur  $N$  (pas nécessairement optimale) peut être déterminée sans connaître la valeur exacte de  $k$ .

Dans la suite, nous aurons également besoin de définir  $\alpha > 0$  tel que

$$\operatorname{Re} \lambda_{N+1} < -\alpha < -3\lambda_1. \quad (3.95)$$

Par (3.72), les valeurs propres de  $A$  dépendent linéairement du coefficient de diffusion  $k$  et, donc,  $N$  dépend aussi *a priori* de  $k$ . On suppose que le nombre (fini) de valeurs propres de  $A$  de partie réelle plus grande que  $-3\lambda_1$  est constant quand  $k$  varie dans  $[k_0 - r_k, k_0 + r_k]$ . Cette hypothèse n'est pas cruciale mais est faite par simplicité. Soit  $\Gamma^N$  une courbe du plan complexe entourant l'ensemble des valeurs propres  $\Sigma^N := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  mais pas d'autre élément du spectre  $\sigma(A)$  de  $A$ . Nous définissons comme dans la Section 3.3.1 l'opérateur de projection  $P^N$ , les sous-espaces projetés  $X^N = P^N X$  et  $X_-^N = (Id - P^N)(X)$  (donnant la décomposition de  $X$  suivante  $X = X^N \oplus X_-^N$ ), et les opérateurs restreints  $A^N$  et  $A_-^N$ , en remplaçant  $M$  par  $N$ .

Dans cette section, on fera l'hypothèse suivante sur  $A^N$  :

**(H)** La restriction  $A^N$  de l'opérateur  $A$  à  $X^N$  est diagonalisable.

Grâce à la formule explicite des valeurs propres (3.72), cette hypothèse peut être facilement vérifiée dans certains cas (par exemple quand le nombre de valeurs propres instables est petit), même sans connaître de manière précise le coefficient de diffusion  $k$ .

Il suit de (3.79) et de (3.83) que toute solution de (3.68) admet la décomposition suivante :

$$p(t) = p^N(t) + p_-^N(t) \quad (3.96)$$

avec

$$\begin{cases} p^N(t) := P^N(p(t)) = \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n t} p_n^0 \varphi_n, & p_n^0 = \langle p(0), \psi_n \rangle, \\ p_-^N(t) := (Id - P^N)(p(t)) = e^{tA} p_-^N(0). \end{cases} \quad (3.97)$$

Dans cette section, nous utiliserons la notation en gras pour les vecteurs et les matrices. La décomposition précédente suggère d'introduire la variable d'état de dimension finie  $N$  suivante :

$$\mathbf{p}^N(t) = (p_1^N(t), \dots, p_N^N(t)) := (e^{\lambda_1 t} p_1^0, \dots, e^{\lambda_N t} p_N^0)^T \in \mathbb{C}^N$$

dont les dynamiques sont simplement données par

$$\dot{\mathbf{p}}^N(t) = \Lambda^N \mathbf{p}^N(t), \quad (3.98)$$

où  $\Lambda^N := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  (rappelons que la donnée initiale  $\mathbf{p}^N(0)$  est inconnue et que les valeurs propres  $\lambda_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , dépendent de  $k$  et sont aussi inconnues). Comme mentionné précédemment, on construit un observateur de dimension finie pour les  $M$  modes instables du système, i.e. les  $M$  premières composantes de  $\mathbf{p}^N(t)$ , notées  $\mathbf{p}(t)$  :

$$\mathbf{p}(t) := (e^{\lambda_1 t} p_1^0, \dots, e^{\lambda_M t} p_M^0)^T \in \mathbb{C}^M.$$

Pour faire ceci, le système (3.98) a besoin d'être complété par des observations de dimension finie, qui peuvent être facilement obtenues à partir du système de dimension infinie comme suit. En définissant les quantités

$$y_n(t) = \langle y(t), C\varphi_n \rangle_Y = \langle Cp(t), C\varphi_n \rangle_Y, \quad n = 1, \dots, N,$$

et en posant

$$\mathbf{y}^N(t) := (y_1(t), \dots, y_N(t))^T \in \mathbb{C}^N,$$

la décomposition (3.96) montre immédiatement que

$$\mathbf{y}^N(t) = \mathbf{C}^N \mathbf{p}^N(t) + \mathbf{y}_-^N(t), \quad (3.99)$$

où la matrice  $\mathbf{C}^N := (C_{mn}^N)_{1 \leq n, m \leq N}$  est définie par  $C_{mn}^N = \langle C\varphi_n, C\varphi_m \rangle_Y$  et

$$\mathbf{y}_-^N(t) := \left( \langle Cp_-^N(t), C\varphi_1 \rangle_Y, \dots, \langle Cp_-^N(t), C\varphi_N \rangle_Y \right) \in \mathbb{C}^N.$$

La famille  $(C\varphi_n)_{1 \leq n \leq N}$  étant linéairement indépendante dans  $X$  (voir [20], [119] ou la Section 3.3.1), la matrice  $\mathbf{C}^N$  est inversible. Par conséquent, l'équation (3.99) se lit de manière équivalente

$$\mathbf{q}^N(t) = \mathbf{p}^N(t) + \mathbf{q}_-^N(t), \quad (3.100)$$

où

$$\mathbf{q}^N(t) = (q_1^N(t), \dots, q_N^N(t))^T := (\mathbf{C}^N)^{-1} \mathbf{y}^N(t)$$

et

$$\mathbf{q}_-^N(t) = (q_{-,1}^N(t), \dots, q_{-,N}^N(t))^T := (\mathbf{C}^N)^{-1} \mathbf{y}_-^N(t).$$

Remarquons que  $\mathbf{q}^N(t)$  est une mesure disponible car  $\mathbf{C}^N$  et  $\mathbf{y}^N(t)$  sont connus.

Suivant Kreisselmeier ([87, 86]), l'observateur de dimension finie dans  $\mathbb{C}^M$  proposé est défini par

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{M}(t) \mathbf{E} \theta(t) \quad (3.101)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}}(t) = \mathbf{F} \mathbf{M}(t) + [q_1^N(t) \mathbf{Id}, \dots, q_M^N(t) \mathbf{Id}], \\ \mathbf{M}(0) = 0, \\ \dot{\theta}(t) = -\gamma \mathbf{E}^* \mathbf{M}^*(t) (\hat{\mathbf{p}}(t) - \Pi_M \mathbf{q}^N(t)), \\ \theta(0) = 0, \end{cases} \quad (3.102)$$

où

- $\hat{\mathbf{p}}$  et  $\theta$  sont des vecteurs dans  $\mathbb{C}^M$  dont les composantes sont respectivement  $\hat{p}_i$  et  $\theta_i$  ;
- $\mathbf{M}(t)$  est une matrice de taille  $M \times M^2$  ;
- $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_M)^T$  est une matrice de taille  $M^2 \times M$ , avec  $\mathbf{E}_n = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , le terme 1 étant à la  $n^{\text{ème}}$  place ;
- $\mathbf{F} = \text{diag}(-f_1, \dots, -f_M)$  où les  $f_i$  sont choisis positifs ;

- $\mathbf{Id}$  est la matrice identité de taille  $M \times M$ ;
- $\Pi_M : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$  est la projection sur les  $M$ -premières composantes (plus précisément, si  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_M, z_{M+1}, \dots, z_N)^T \in \mathbb{C}^N$ , alors  $\Pi_M \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_M)^T \in \mathbb{C}^M$ );
- $\gamma$  est un nombre réel positif (coefficient de gain);
- $\mathbf{B}^*$  représente la matrice adjointe de la matrice  $\mathbf{B}$  (i.e. la matrice transposée de la matrice conjuguée de  $\mathbf{B}$ ).

On peut souligner le fait que l'estimateur adaptatif d'état (3.101)-(3.102) est celui proposé par Kreisselmeier (voir (9) dans [87]) dans le cas particulier où la donnée initiale de l'observateur est zéro et où les dynamiques de  $\theta$  sont motivées par un critère d'erreur quadratique  $L$  (voir (7) dans [87]). Cependant, l'erreur de mesure disponible ici n'est pas  $\hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{p}^N(t)$  (car  $\mathbf{p}^N(t) = \mathbf{q}^N(t) - \mathbf{q}_-^N(t)$  est inconnu) mais seulement  $\hat{\mathbf{p}}(t) - \Pi_M \mathbf{q}^N(t)$ , et ceci engendre des difficultés supplémentaires. En particulier, c'est pourquoi l'observateur  $\hat{\mathbf{p}}(t) \in \mathbb{C}^M$  est calculé en utilisant le vecteur de sortie  $\Pi_M \mathbf{q}^N(t) = (q_1^N(t), \dots, q_M^N(t))^T \in \mathbb{C}^M$ , ce dernier étant obtenu à partir des  $N > M$  mesures recueillies dans le vecteur  $\mathbf{y}^N(t) \in \mathbb{C}^N$ . Cette construction, qui peut sembler non naturelle, assure que le terme restant  $\mathbf{q}_-^N(t)$  décroît vite vers 0 et donc garantit la convergence de l'observateur.

Soit  $\boldsymbol{\theta}^\infty := (\lambda_1 + f_1, \dots, \lambda_M + f_M)^T = (\boldsymbol{\Lambda}^M - \mathbf{F}) \mathbf{1} \in \mathbb{C}^M$ , où  $\mathbf{1}$  est le vecteur de  $\mathbb{C}^M$  dont toutes les composantes sont égales à 1 et où  $\boldsymbol{\Lambda}^M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ .

Nous pouvons maintenant énoncer les deux principaux résultats de cette section et de [121].

**Théorème 3.3.3** Soit  $R > 0$  et  $\varepsilon > 0$  donnés. Supposons que la donnée initiale  $p_0$  vérifie

$$\|p_0\|_X \leq R \quad (3.103)$$

et

$$|p_n^0| > \varepsilon, \quad \forall n = 1, \dots, M. \quad (3.104)$$

Supposons aussi que  $N$  soit choisi tel que (3.94) soit satisfait. Enfin, soit  $\hat{\mathbf{p}}(t)$  et  $\boldsymbol{\theta}(t)$  définis par (3.101) et (3.102). Alors on peut choisir la matrice  $\mathbf{F}$  telle qu'il existe  $\kappa > 0$ ,  $\omega > 0$  satisfaisant

$$\|\boldsymbol{\theta}(t) - \boldsymbol{\theta}^\infty\|_{\mathbb{C}^M} \leq \kappa e^{-\omega t} \quad \text{et} \quad \|\hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\mathbb{C}^M} \leq \kappa e^{-\omega t} \quad (t > 0).$$

**Remarque 3.3.5** On peut remarquer que  $\boldsymbol{\theta}^\infty$  donne une estimée des  $M$  premières valeurs propres de  $A$ , et donc du coefficient de diffusion inconnu  $k$ . En particulier,  $\theta_1(t)$  converge exponentiellement vers  $\theta_1^\infty = \lambda_1 + f_1 = \lambda_1^0 - k\lambda_1^D + f_1$ .

**Théorème 3.3.4** Soit  $\hat{\mathbf{p}}(t) = (\hat{p}_1(t), \dots, \hat{p}_M(t))^T \in \mathbb{C}^M$  et  $\boldsymbol{\theta}(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_M(t))^T \in \mathbb{C}^M$  définis par (3.101) et (3.102), et posons

$$\hat{p}(t) = \sum_{n=1}^M \hat{p}_n(t) \varphi_n. \quad (3.105)$$

Alors, sous les hypothèses du Théorème 3.3.3, on peut choisir la matrice

$$\mathbf{F} = \text{diag}(-f_1, \dots, -f_M), \quad f_i > 0, \quad i = 1, \dots, M,$$

telle qu'il existe  $\kappa > 0$  et  $\omega > 0$  satisfaisant

$$\|\hat{p}(t) - p(t)\|_X \leq \kappa e^{-\omega t} \quad (t > 0).$$

De plus, on a

$$k = \frac{1}{\lambda_1^D} \left( \lambda_1^0 + f_1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_1(t) \right).$$

**Preuve.** Définissons  $P^M, X^M, X_-^M, p^M, p_-^M$  comme ci-dessous, mais en remplaçant  $N$  par  $M$ . En utilisant (3.96) écrit avec  $M$  à la place de  $N$ , on a

$$\|\hat{p}(t) - p(t)\|_X^2 \leq 2 \|\hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{p}(t)\|_{\mathcal{C}^M}^2 + 2 \left\| e^{tA} p_-^M(0) \right\|_X^2.$$

De plus, on a

$$\left\| e^{tA} p_-^M(0) \right\|_X \leq K \|p_-^M(0)\|_X e^{-\alpha_M t},$$

où  $K > 0$  et  $\alpha_M$  est une constante positive telle que  $-\alpha_M > \operatorname{Re} \lambda_{M+1}$ . Il suffit alors d'appliquer le Théorème 3.3.3. ■

### 3.3.3 Quelques questions ouvertes

Tout d'abord l'implémentation numérique de l'observateur adaptatif de la Section 3.3.2 reste à faire afin de valider numériquement l'efficacité de notre méthode, comme nous avons pu le faire pour l'observateur de type Luenberger de la Section 3.3.1.

Pour les deux observateurs, il serait intéressant d'étudier l'analyse de convergence et les estimations d'erreur de ces algorithmes (voir [71]) et de faire une analyse numérique complète des approximations semi-discrètes (en espace) et complètement discrétisées par éléments finis en espace et différences finies en temps. Il serait également intéressant de s'assurer que la stabilité exponentielle du système discrétisé soit uniforme par rapport au pas de discrétisation (voir Section 4).

Un autre type de généralisation est de considérer des non-linéarités dans les coefficients de mortalité et de natalité :

$$\beta(a, x, P(x, t)) \quad \text{et} \quad \mu(a, x, P(x, t)),$$

où

$$P(x, t) = \int_0^{a^*} p(a, x, t) da,$$

c'est à dire que les coefficients de natalité et de mortalité dépendent de la population totale, ce qui semble plus réaliste. Dans ce cas, les modèles deviennent non linéaires et l'analyse devient plus difficile. La contrôlabilité à zéro par migration d'une tranche d'âge quelconque des équations structurées en âge non-linéaires sans diffusion spatiale a été étudiée dans [4] lorsqu'il est possible de contrôler les jeunes individus. La démonstration repose sur le cas linéaire et le passage du cadre linéaire au cadre non linéaire s'effectue grâce au théorème du point fixe de Kakutani. Ce résultat a été récemment amélioré dans [72], toujours sans diffusion spatiale, en utilisant des principes de comparaison. Le contrôle à zéro dans le cadre non linéaire des équations structurées en âge avec diffusion spatiale a été étudié dans [4] lorsqu'il est possible d'influer sur l'ensemble des individus d'une certaine zone du milieu considéré. Ce résultat est basé sur des inégalités de Carleman globales et le théorème du point fixe de Kakutani.

Enfin un autre problème qui me semble intéressant est l'identifiabilité du taux de mortalité  $\mu$ . Dans [115] sont données des conditions pour obtenir l'identifiabilité du taux de mortalité en observant des individus d'un groupe d'âge dans le cas du modèle sans diffusion. L'étude du cas avec diffusion pourrait être intéressante. Il serait peut être utile de se baser sur une inégalité de Carleman.



## Chapitre 4

# Approximations numériques

Ce chapitre traite des approximations numériques des problèmes de contrôle ou de stabilité.

Quand on veut calculer les contrôles à zéro d'une EDP linéaire, la stratégie la plus naturelle consiste à :

- donner une approximation de dimension finie de l'EDP par des méthodes numériques (différences finies, éléments finis,...) ;
- calculer le contrôle à zéro de l'EDO obtenue précédemment.

On espère alors que les contrôles calculés de cette manière sont proches (et convergent quand le pas de discrétisation tend vers zéro) du contrôle de l'EDP. Ce n'est pas vrai en général. La suite des contrôles n'est en général même pas bornée. Ce phénomène est dû aux modes étrangers que le schéma numérique introduit à hautes fréquences : le schéma génère des oscillations à hautes fréquences qui n'existent pas dans le modèle continu. Par conséquent, contrôler un modèle numérique discrétisé ne garantit pas d'obtenir une bonne approximation numérique du contrôle du modèle continu. L'inégalité d'observabilité discrète n'est en fait pas uniforme par rapport au pas de discrétisation, en raison de l'existence des solutions à hautes fréquences dont la vitesse de groupe de propagation est de l'ordre du paramètre de discrétisation. Il se produit le même phénomène dans le cas de la stabilité avec un taux de décroissance de l'énergie discrétisée non-uniforme par rapport au pas de discrétisation. Ce phénomène a été mis en évidence dans les années 1990 ([68]), et il a été proposé des techniques très efficaces afin de restaurer la convergence du contrôle discret, comme la régularisation de Tychonoff [68], l'algorithme bi-grille [67], la méthode des éléments finis mixtes [32, 33], la viscosité numérique [118, 130] ou le filtrage des hautes fréquences [77]. Ces méthodes ont pour effet de redresser le spectre discret pour les hautes fréquences. Je réfère également aux surveys [61, 148].

Dans une première partie, nous allons étudier les propriétés d'observabilité de schémas d'approximations en temps d'équations paraboliques abstraites. En supposant que le système continu est observable, nous donnons des résultats d'observabilité uniforme pour des schémas discrétisés en temps appropriés dans une classe de données initiales filtrées. Nous proposons un algorithme de type HUM permettant de calculer des approximations des contrôles exacts.

Dans une deuxième partie, nous considérons les approximations en espace des équations d'évolution du second ordre et nous montrons, qu'en introduisant des viscosités numériques dans les schémas semi-discrétisés en espace, la décroissance exponentielle ou polynomiale uniforme des schémas discrets est conservée quand le système continu a une telle décroissance et quand le spectre de l'opérateur spatial associé au problème non amorti satisfait la condition de gap généralisé.

Enfin dans une dernière partie, on étudie les approximations numériques des solutions



d'une classe de problèmes de contrôle en temps optimal de systèmes paraboliques abstraits. On montre, à condition que la cible soit une boule fermée centrée à l'origine, que les temps et les contrôles optimaux des problèmes approchés convergent (dans une norme appropriée) vers le temps optimal et le contrôle optimal du problème d'origine.

## 4.1 Observabilité d'équations linéaires paraboliques abstraites discrétisées en temps

Cette section fait référence à l'article [59] ([EV10]) écrit en collaboration avec Sylvain Ervedoza (Toulouse).

Soit  $X$  un espace de Hilbert muni de la norme  $\|\cdot\|_X$  et soit  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$  un opérateur auto-adjoint défini positif avec domaine dense et résolvante compacte.

On considère le système abstrait suivant :

$$\dot{z}(t) + Az(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad z(0) = z_0. \quad (4.1)$$

De telles équations sont souvent utilisées comme modèles pour des systèmes diffusifs et en particulier pour l'équation de la chaleur.

Supposons que  $Y$  est un autre espace de Hilbert muni de la norme  $\|\cdot\|_Y$ . On note par  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace des opérateurs linéaires de  $X$  dans  $Y$ , muni de la norme classique des opérateurs. Soit  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^\nu), Y)$ , avec  $\nu \leq 1/2$ , un opérateur d'observation, et définissons la fonction de sortie

$$y(t) = Bz(t). \quad (4.2)$$

Pour donner un sens à (4.2), on suppose que  $B$  est un opérateur d'observation admissible, i.e. pour tout  $T > 0$ , il existe une constante  $K_T > 0$  telle que toute solution du système (4.1) avec donnée initiale  $z_0 \in \mathcal{D}(A)$  satisfait

$$\int_0^T \|Bz(t)\|_Y^2 dt \leq K_T \|z_0\|_X^2. \quad (4.3)$$

Sous cette hypothèse, la fonction de sortie  $y$  dans (4.2) est bien-posée comme une fonction de  $L^2((0, T); Y)$  pour toute solution de (4.1) avec donnée initiale  $z_0 \in X$ .

Cette propriété est automatiquement vérifiée quand  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^\nu), Y)$  avec  $\nu \leq 1/2$  (voir, par exemple, [142] et le Théorème 2.2 de [59]), ce que l'on supposera dans la suite.

La propriété d'observabilité exacte pour le système (4.1)-(4.2) peut être formulée comme suit :

**Définition 4.1.1** *Le système (4.1)-(4.2) est exactement observable en temps  $T^*$  si il existe  $k_* > 0$  tel que toute solution du système (4.1) avec donnée initiale  $z_0 \in X$  satisfait*

$$k_* \|z(T^*)\|_X^2 \leq \int_0^{T^*} \|Bz(t)\|_Y^2 dt. \quad (4.4)$$

*De plus, le système (4.1)-(4.2) est dit exactement observable si il est exactement observable pour un temps  $T^* > 0$ .*

Les inégalités (4.3) et (4.4) sont pertinentes dans la théorie du contrôle par un argument de dualité donné par la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method), voir [93].

Dans la suite, on suppose (4.4) pour le système continu. De tels résultats sont prouvés, souvent par des estimées de Carleman, pour différents modèles incluant l'équation de la chaleur [65, 76, 92], les équations de Stokes [63], et d'autres modèles singuliers comme [31, 138]...

Le but de cette section est d'étudier les propriétés d'admissibilité et d'observabilité pour des schémas d'approximation en temps de (4.1)-(4.2), et leurs propriétés de contrôlabilité correspondantes.

Pour être plus précis, on considère une discrétisation linéaire en temps de (4.1)-(4.2), qui prend la forme générale

$$\begin{cases} z^{k+1} &= \mathbb{T}_{\Delta t} z^k, & k \in \mathbb{N}, \\ z^0 &= z_0, \end{cases} \quad y^k = Bz^k, \quad (4.5)$$

où  $\Delta t > 0$  est le paramètre de discrétisation en temps,  $z^k$  est une approximation de  $z$  au temps  $k\Delta t$ , et  $\mathbb{T}_{\Delta t}$  est une approximation de  $\exp(-(\Delta t)A)$ , dans un sens que nous précisons plus tard.

Comme on suppose que  $A$  est un opérateur auto-adjoint défini positif avec résolvante compacte, son spectre est explicitement donné par une suite croissante  $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de nombres réels positifs avec  $\lim_j \mu_j = +\infty$  et de vecteurs propres correspondant  $(\Phi_j)_j$  tels que

$$A\Phi_j = \mu_j \Phi_j.$$

De plus, on peut imposer que la suite  $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  soit une base orthonormée de  $X$ .

Nous présentons maintenant plus précisément les hypothèses sur  $\mathbb{T}_{\Delta t}$ . On suppose que les opérateurs discrets  $\mathbb{T}_{\Delta t}$  préservent les vecteurs propres, et qu'il existe une fonction  $f : [0, R) \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que, pour tout  $\Delta t > 0$ ,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \mu_j < \frac{R}{\Delta t}, \quad \begin{cases} \mathbb{T}_{\Delta t} \Phi_j = \exp(-(\Delta t)\lambda_{j,\Delta t}) \Phi_j, \\ \text{où } \lambda_{j,\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} f((\Delta t)\mu_j), \end{cases} \quad (4.6)$$

ou, dans une forme plus concise,  $\mathbb{T}_{\Delta t} = \exp(-f((\Delta t)A))$ . De telles hypothèses sont de nature très générale et sont satisfaites pour beaucoup de schémas d'approximation discrétisés en temps, par exemple les méthodes d'Euler implicites et explicites, le schéma de Crank-Nicolson, les  $\theta$ -méthodes, les discrétisations de Runge-Kutta... voir, par exemple, le livre [50] et les exemples présentés en Section 2.1 de [59]. En d'autres termes, la fonction  $f$  décrit l'action d'une méthode numérique donnée, et  $R$  correspond à la limite de stabilité de la méthode numérique.

On suppose aussi que  $f$  est assez régulier (en fait  $C^2$  est suffisant), et que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(\eta)}{\eta} = 1 \quad \text{et} \quad \forall \eta \in (0, R), \quad f(\eta) > 0. \quad (4.7)$$

La première hypothèse est équivalente à la consistance du schéma. La seconde assure que le schéma numérique amortit les fréquences, ce dont on a besoin pour la stabilité numérique.

Pour être plus claire, je vais donner l'exemple de la  $\theta$ -méthode. Soit  $\theta \in [0, 1]$ . La  $\theta$ -méthode est donnée par

$$\frac{z^{k+1} - z^k}{\Delta t} = -A(\theta z^{k+1} + (1 - \theta)z^k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad z^0 = z_0.$$

C'est une généralisation de la méthode de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ ) et des méthodes d'Euler ( $\theta = 0$  pour la méthode d'Euler explicite et  $\theta = 1$  pour Euler implicite). L'opérateur  $\mathbb{T}_{\Delta t}$  est alors donné par

$$\mathbb{T}_{\Delta t} = (I + \theta(\Delta t)A)^{-1} (I - (1 - \theta)(\Delta t)A).$$

Donc, la fonction  $f_\theta$  est définie par

$$f_\theta : \left[0, \frac{1}{1 - \theta}\right) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \eta \mapsto \ln \left( \frac{1 + \theta\eta}{1 - (1 - \theta)\eta} \right), \quad \left( R_\theta = \frac{1}{1 - \theta} \right).$$

En particulier, pour la méthode d'Euler implicite,  $\theta = 1$  et  $R_\theta = \infty$ .

Dans la suite, on suppose que les opérateurs discrets  $T_{\Delta t}$  satisfont ces conditions.

On étudie les propriétés d'admissibilité et d'observabilité dont on a besoin pour la contrôlabilité (voir [93, 147, 148]).

• *Admissibilité uniforme* : Trouver des constantes positives  $T$  et  $K_T$  telles que pour tout  $\Delta t > 0$ , toute solution  $z$  de (4.5) avec donnée initiale  $z_0$  dans une classe appropriée  $X_{\Delta t}$  satisfait

$$\Delta t \sum_{k=0}^{\lceil T/\Delta t \rceil} \|Bz^k\|_Y^2 \leq K_T \|z_0\|_X^2. \quad (4.8)$$

Remarquons que, en utilisant la décroissance de  $k \mapsto \|z^k\|_X^2$ , on peut facilement vérifier que, si on a (4.8) pour un  $(\tilde{T}, K_{\tilde{T}})$ , on l'a aussi pour tout temps  $T$ , en prenant  $K_T = K_{\tilde{T}}(1 + T/\tilde{T})$ .

• *Observabilité uniforme* : Trouver des constantes positives  $T^*$  et  $k_*$  telles que pour tout  $\Delta t > 0$ , toute solution  $z$  de (4.5) avec donnée initiale  $z_0$  dans une classe appropriée  $X_{\Delta t}$  satisfait

$$k_* \|z\|_X^2 \leq \Delta t \sum_{k=0}^{\lceil T^*/\Delta t \rceil} \|Bz^k\|_Y^2. \quad (4.9)$$

Bien évidemment, notre intérêt est de prendre la classe  $X_{\Delta t}$  aussi grande que possible. Cependant,  $X_{\Delta t} = X$  est hors de portée en général, même quand  $R = \infty$  (voir [146]). Mais au moins on veut que  $X_{\Delta t} \rightarrow_{\Delta t \rightarrow 0} X$  dans un certain sens, dans le but de retrouver les propriétés d'admissibilité et d'observabilité (4.3) et (4.4) du système continu quand  $\Delta t \rightarrow 0$ .

On peut souligner le fait que les inégalités (4.8)-(4.9) doivent être uniforme en  $\Delta t$ . En effet, ceci est nécessaire dans le contexte de la contrôlabilité pour assurer la convergence des contrôles discrétisés (voir [148]).

Il est maintenant bien connu que le processus de discrétisation peut créer des solutions trompeuses à haute fréquence qui amènent à des propriétés d'observabilité non-uniformes.

Pour des approximations semi-discrètes en *temps* de systèmes paraboliques, nous pouvons citer [146], qui est basé sur des estimées spectrales prouvées dans [92]. En utilisant un argument de dualité standart, on peut facilement vérifier que les résultats dans [146] se lisent comme une inégalité d'observabilité similaire à (4.9) dans une classe de données initiales filtrées dans le cas spécial où l'opérateur  $A = -\Delta_D$  est l'opérateur de Laplace avec conditions au bord de Dirichlet dans un domaine régulier borné  $\Omega$  et  $B$  est l'opérateur de restriction à  $\omega$ . Dans [146], il est aussi prouvé que le filtrage des données initiales est nécessaire pour obtenir des résultats d'observabilité uniforme des équations de la chaleur semi-discrétisées en temps.

La semi-discrétisation en *espace* de l'équation de la chaleur 1-d a été étudiée dans [98] en utilisant un théorème de type Müntz Szász. Dans ce cas, les propriétés d'observabilité sont uniformes par rapport au pas de discrétisation en *espace* [98]. Un résultat plus général a été obtenu dans [88], qui fournit une inégalité d'observabilité faible dans un cadre très général inspiré par [91]. La propriété d'observabilité faible dans [88] suffit à obtenir une méthode numérique explicite pour calculer des approximations de contrôles exacts pour le système continu. Ici nous suivons la méthodologie de [88] et obtenons des formes faibles de (4.9) pour des systèmes semi-discrétisés en temps, ce qui sera pertinent pour des problèmes de contrôlabilité exacte.

Notons cependant que les résultats présentés ci-dessous et dans [88] sont plus précis que ceux dans [91], qui s'intéresse en effet au problème LQR (linear quadratic regulator), correspondant à une approche de type contrôle optimal (en particulier, le point final n'est pas fixé).

Le contre-exemple de Kavian dans [148] souligne aussi le besoin de filtrer les données initiales pour obtenir des résultats d'observabilité uniforme pour les approximations semi-discrétisées en espace de l'équation de la chaleur dans le carré 2-d.

Introduisons, pour  $s \in \mathbb{R}_+$ , l'espace filtré suivant :

$$\mathcal{C}(s) = \text{Vect}\left\{\Phi_j : \text{les } \mu_j \text{ correspondants satisfont } \mu_j \leq s\right\}. \quad (4.10)$$

Nous sommes maintenant prêt à énoncer le résultat principal de cette section et de [59] :

**Théorème 4.1.1** *Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint défini positif avec domaine dense et résolvente compacte, et  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^\nu), Y)$ , avec  $\nu < 1/2$ . Soit  $\mathbb{T}_{\Delta t}$  un schéma numérique satisfaisant (4.6) et (4.7). Supposons aussi que le système (4.1)-(4.2) est exactement observable en un temps  $T^*$ . Posons*

$$\beta = \min\{2, 1 - 2\nu\}. \quad (4.11)$$

*Alors, pour tout  $\delta \in (0, R)$ , il existe des constantes positives  $K_\delta$ ,  $k_\delta$  and  $C_\delta$  tels que, pour tout  $\Delta t > 0$ , toute solution  $z^k$  de (4.5) avec donnée initiale  $z_0 \in \mathcal{C}(\delta / \Delta t)$  satisfait*

$$k_\delta \left\| z^{\lceil T^* / \Delta t \rceil} \right\|_X^2 \leq \Delta t \sum_{k=0}^{\lceil T^* / \Delta t \rceil} \left\| Bz^k \right\|_Y^2 + C_\delta (\Delta t)^\beta \|z_0\|_X^2 \leq K_\delta \|z_0\|_X^2. \quad (4.12)$$

L'inégalité d'admissibilité dans (4.12) peut être obtenue comme dans le cas continu, voir le Théorème 2.2 dans [59]. Filtrer les données est nécessaire pour obtenir les propriétés d'admissibilité uniformes dans (4.12), même quand  $R = \infty$  (voir la Remarque 2.3 de [59]).

L'inégalité d'observabilité dans (4.12) est une forme faible de (4.9), à cause de la présence du terme  $(\Delta t)^\beta \|z_0\|_X^2$ . Ce terme est nécessaire dans le cadre général, même après avoir filtré les données initiales.

Cependant cette inégalité d'observabilité faible (4.12) est suffisante pour obtenir des propriétés de contrôlabilité (approchée) pour des schémas semi-discrétisés en temps (l'erreur sur l'état final est de l'ordre de  $(\Delta t)^{\beta/2}$ , qui tend vers 0 quand  $\Delta t$  tend vers 0) et nous proposons une méthode numérique efficace qui calcule une approximation discrète d'un contrôle exact pour le système continu. Plus précisément, nous montrons que la suite des contrôles discrets converge vers un contrôle du système continu (à sous-suites près). Cette méthode est inspiré par des résultats antérieurs pour la semi-discrétisation en espace des équations de type chaleur [88] et sur des techniques de régularisation de Tychonov pour les équations de type ondes [58, 68, 148].

Un des intérêt de notre approche est que nous pouvons l'appliquer à des familles d'opérateurs qui sont uniformément observables. En particulier, on peut obtenir des propriétés d'observabilité uniforme (par rapport aux paramètres de discrétisation à la fois en espace et en temps) pour des schémas d'approximation complètement discrétisés sous la condition que les schémas d'approximation semi-discrétisés en espace sont uniformément observables par rapport au paramètre de discrétisation en espace.

Une première application de notre travail [59] est le schéma d'approximation numérique obtenu par différences finies de l'équation de la chaleur 1-d, pour lequel les propriétés d'observabilité sont uniformes par rapport au pas de discrétisation en espace (voir [98]). Plus généralement, nous pouvons considérer des systèmes dissipatifs généraux semi-discrétisés en espace par la méthode des éléments finis pour lesquels des propriétés d'observabilité faibles ont été prouvées (voir [88]) et en combinant les résultats précédents, on obtient des résultats d'observabilité faible pour des systèmes complètement discrétisés (uniformément par rapport aux paramètres de discrétisation en espace et en temps).

Dans ce travail, nous avons besoin de l'hypothèse  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^\nu), Y)$  avec  $\nu < 1/2$ . Il y a beaucoup de cas où cette condition n'est pas satisfaite, par exemple en considérant le problème classique de l'observabilité de l'équation de la chaleur par sa dérivée normale sur le bord. Ce pourrait donc être intéressant de regarder le cas  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), Y)$ .

## 4.2 Approximations des équations d'évolution du second ordre

Dans cette section, je vais considérer l'approximation des équations d'évolution du second ordre, qui a été traité dans [3] ([ANVW13]) en collaboration avec Farah Abdallah (alors étudiante en thèse de Serge Nicaise en co-tutelle avec Ali Wehbe), Serge Nicaise et Ali Wehbe (Beyrouth, Liban), ainsi que dans la version préliminaire [2] ([ANVW12]).

Nous nous plaçons dans le même cadre abstrait que dans la Section 3.1. Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe avec norme et produit scalaire notés respectivement par  $\|\cdot\|$  et  $(\cdot, \cdot)$ . Soit  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$  un opérateur auto-adjoint positif avec inverse compact dans  $H$ . Soit  $V := \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$  le domaine de  $A^{\frac{1}{2}}$ . Notons par  $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})'$  l'espace dual de  $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$  obtenu avec le produit scalaire de  $H$ .

De plus, soit  $U$  un espace de Hilbert complexe (que l'on identifiera à son espace dual) avec norme et produit scalaire notés respectivement  $\|\cdot\|_U$  et  $(\cdot, \cdot)_U$ , et soit  $B \in \mathcal{L}(U, H)$  un opérateur linéaire borné de  $U$  dans  $H$  (contrairement à la Section 3.1). Nous considérons le système en boucle fermé suivant

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + BB^*\dot{\omega}(t) = 0, & t > 0, \\ \omega(0) = \omega_0, & \dot{\omega}(0) = \omega_1, \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $t \in [0, \infty)$  représente le temps,  $\omega : [0, \infty) \rightarrow H$  est l'état du système. La plupart des équations linéaires modélisant les vibrations de structures élastiques avec contrôle feedback (correspondant à des capteurs et des actionneurs mis-ensembles) peuvent s'écrire sous la forme (4.13), où  $\omega$  représente le champs de déplacement.

Nous définissons l'énergie du système (4.13) au temps  $t$  par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \|\dot{\omega}(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\omega(t)\|^2 \right).$$

De simples calculs formels donnent

$$E(0) - E(t) = \int_0^t (BB^*\dot{\omega}(s), \dot{\omega}(s)) ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Ceci veut évidemment dire que l'énergie est décroissante.

Dans beaucoup d'applications, le système (4.13) est approché par des systèmes de dimension finie. Mais il est maintenant bien connu que si le système continu est exponentiellement ou polynomialement stable, le système discrétisé ne bénéficie pas de cette propriété à cause des modes à hautes fréquences. Plusieurs méthodes ont été proposées pour surmonter ces difficultés.

Notre but est d'amortir les hautes fréquences en introduisant une viscosité numérique dans les schémas d'approximation, comme dans [118, 130]. Même si notre travail est inspiré de [118], il diffère de ce papier sur les points suivants :

- Contrairement à [118] où la condition de gap standard est requise, on suppose seulement que le spectre de l'opérateur  $A^{1/2}$  satisfait la condition de gap généralisé, ce qui nous permet de traiter des systèmes concrets plus généraux. De plus, nous traitons le cas de valeurs propres multiples ;
- nous étudions la décroissance polynomiale des schémas discrétisés quand le problème continu a une telle décroissance ;
- nous prouvons un résultat sur la stabilité polynomiale uniforme pour une famille de semi-groupes ;
- en utilisant une version générale du théorème de Trotter-Kato prouvé dans [79], nous montrons que la solution discrète tend vers la solution de (4.13) quand le paramètre de discrétisation tend vers zéro et si les données initiales discrètes sont bien choisies.

Avant d'énoncer nos résultats principaux, nous allons introduire des notations et définitions. On note par  $\|\cdot\|_V$  la norme sur  $V$  définie par :

$$\|\varphi\|_V = \sqrt{(A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\frac{1}{2}}\varphi)}, \quad \forall \varphi \in V.$$

Remarquons que

$$\|\varphi\|_V = \sqrt{(A\varphi, \varphi)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A).$$

On suppose maintenant que  $(V_h)_{h>0}$  est une suite de sous-espaces de dimension finie de  $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ . Le produit scalaire dans  $V_h$  est la restriction du produit scalaire dans  $H$  et est toujours noté par  $(\cdot, \cdot)$  (car  $V_h$  peut être vu comme un sous-espace de  $H$ ). Nous définissons l'opérateur  $A_h : V_h \rightarrow V_h$  par

$$(A_h\varphi_h, \psi_h) = (A^{\frac{1}{2}}\varphi_h, A^{\frac{1}{2}}\psi_h), \quad \forall \varphi_h, \psi_h \in V_h. \quad (4.14)$$

Soit  $a(\cdot, \cdot)$  la forme sesquilinéaire sur  $V_h \times V_h$  définie par

$$a(\varphi_h, \psi_h) = (A^{\frac{1}{2}}\varphi_h, A^{\frac{1}{2}}\psi_h), \quad \forall (\varphi_h, \psi_h) \in V_h \times V_h. \quad (4.15)$$

Nous définissons aussi les opérateurs  $B_h : U \rightarrow V_h$  par

$$B_h u = j_h B u, \quad \forall u \in U, \quad (4.16)$$

où  $j_h$  est la projection orthogonale de  $H$  sur  $V_h$  par rapport au produit scalaire dans  $H$ . L'adjoint  $B_h^*$  de  $B_h$  est alors donné par la relation

$$B_h^* \varphi_h = B^* \varphi_h, \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

Nous supposons aussi que la famille des sous-espaces  $(V_h)_h$  approche l'espace  $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ . Plus précisément, si  $\pi_h$  est la projection orthogonale de  $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$  sur  $V_h$ , on suppose qu'il existe  $\theta > 0$ ,  $h^* > 0$  et  $C_0 > 0$  tels que, pour tout  $h \in (0, h^*)$ , on a :

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\|_V \leq C_0 h^\theta \|A\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A), \quad (4.17)$$

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\| \leq C_0 h^{2\theta} \|A\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A). \quad (4.18)$$

Les hypothèses (4.17) et (4.18) sont, en particulier, vérifiées dans le cas des approximations par éléments finis standards des espaces de Sobolev.

Nous utilisons les mêmes notations que dans la Section 3.1.1 :  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A^{\frac{1}{2}}$  comptées avec leurs multiplicités que l'on réécrit

$$\lambda_{k_1} < \lambda_{k_2} < \dots < \lambda_{k_i} < \dots,$$

$l_i$  est la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_{k_i}$  et  $\{\varphi_{k_i+j}\}_{0 \leq j \leq l_i-1}$  sont les vecteurs propres orthonormés associés à la valeur propre  $\lambda_{k_i}$ . Nous supposons la condition de gap généralisé (3.15). Soit  $\gamma'_0 \leq \gamma_0$ . Nous définissons  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ ,  $B_{k_n} = (B_{k_n, ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  et  $\Phi_{k_n}$  comme dans la Section 3.1.1 (avec  $B = B_1 \in \mathcal{L}(U, H)$  ici).

Dans cette section, nous donnons deux résultats. Le premier résultat donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir la stabilité exponentielle de la famille de systèmes

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_h(t) + A_h \omega_h(t) + B_h B_h^* \dot{\omega}_h(t) + h^\theta A_h \dot{\omega}_h(t) = 0, & t > 0, \\ \omega_h(0) = \omega_{0h} \in V_h, & \dot{\omega}_h(0) = \omega_{1h} \in V_h. \end{cases} \quad (4.19)$$

Le système d'approximation de type Galerkin (4.19) est celui introduit dans [118], mais nous supposons ici la condition de gap généralisé (3.15) ainsi que la possibilité de valeurs propres

multiples, contrairement à [118]. Ici  $\omega_{0h}$  (resp.  $\omega_{1h}$ ) est une approximation de  $\omega_0$  (resp.  $\omega_1$ ) dans  $V_h$ . Nous avons besoin de faire l'hypothèse suivante :

$$\exists \alpha_0 > 0, \forall k \in \{1, \dots, M\}, \forall k_n \in A_k, \forall C \in \mathbb{R}^{L_n}, \quad \left\| B_{k_n}^{-1} \Phi_{k_n} C \right\|_{U,2} \geq \alpha_0 \|C\|_2, \quad (4.20)$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne. Cette hypothèse nous donne la stabilité exponentielle du problème continu (4.13). Le premier résultat principal est le suivant.

**Théorème 4.2.1** *Supposons que la condition de gap généralisé (3.15) et l'hypothèse (4.20) sont vérifiées. Supposons que la famille des sous-espaces  $(V_h)$  satisfait (4.17) et (4.18). Alors la famille des systèmes (4.19) est uniformément exponentiellement stable, au sens où il existe des constantes  $M, \alpha, h^* > 0$  (indépendantes de  $h, \omega_{0h}, \omega_{1h}$ ) telles que pour tout  $h \in (0, h^*)$  :*

$$\|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + a(\omega_h(t), \omega_h(t)) \leq Me^{-\alpha t} (\|\omega_{1h}\|^2 + a(\omega_{0h}, \omega_{0h})), \quad \forall t \geq 0.$$

**Remarque 4.2.1** Si on a la condition du gap standard

$$\exists \gamma_0 > 0, \forall n \geq 1, \quad \lambda_{k_{n+1}} - \lambda_{k_n} \geq \gamma_0, \quad (4.21)$$

alors  $A_1 = \mathbb{N}^*$  et  $B_1 = 1$ . Dans ce cas, l'hypothèse (4.20) devient

$$\exists \alpha_0 > 0, \forall k_n \geq 1, \forall C \in \mathbb{R}^{l_n}, \quad \|\Phi_{k_n} C\|_U \geq \alpha_0 \|C\|_2,$$

où  $\Phi_{k_n}$  est la matrice à coefficients dans  $U$  de taille  $1 \times l_n$  définie par

$$\Phi_{k_n} = [B^* \varphi_{k_n} B^* \varphi_{k_n+1} \cdots B^* \varphi_{k_n+l_n-1}].$$

De plus, si on a la condition de gap standard (4.21) et si les valeurs propres sont simples, l'hypothèse (4.20) devient

$$\exists \alpha_0 > 0, \forall k \geq 1, \quad \|B^* \varphi_k\|_U \geq \alpha_0. \quad (4.22)$$

C'est cette dernière hypothèse (4.22) qui est faite dans [118].

**Remarque 4.2.2** Notons que le Théorème 4.2.1 est la version discrète de la décroissance exponentielle des solutions du problème continu (4.13) sous les hypothèses (3.15) et (4.20) (voir la Section 3.1.1). Remarquons que l'hypothèse (3.10) est satisfaite car  $A$  est un opérateur auto-adjoint positif avec résolvante compacte et  $B$  est borné.

**Remarque 4.2.3** La stabilité exponentielle uniforme de la famille de systèmes (4.19) a déjà été prouvée dans le Théorème 7.1 de [57] sans hypothèse sur le spectre de  $A$  et la dimension de l'espace. La preuve de ce théorème est basée sur le découplage des basses et des hautes fréquences. Plus précisément, l'auteur combine une estimation d'observabilité uniforme pour des données initiales filtrées correspondant aux basses fréquences (voir le Théorème 1.3 de [57]) avec un résultat de [60]. En effet, dans [60], après avoir ajouté un terme de viscosité numérique, une autre estimée d'observabilité uniforme est obtenue pour les composantes des hautes fréquences. Les deux inégalités d'observabilité obtenues amènent à la décroissance exponentielle uniforme de (4.19).

Si la condition (4.20) n'est pas satisfaite, on regarde une version plus faible. Si on suppose que

$$\exists l \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_0 > 0, \forall k \in \{1, \dots, M\}, \forall k_n \in A_k, \forall C \in \mathbb{R}^{L_n}, \quad \left\| B_{k_n}^{-1} \Phi_{k_n} C \right\|_{U,2} \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_{k_n}^l} \|C\|_2, \quad (4.23)$$

donnant la stabilité polynomiale du problème continu (4.13), alors on obtiendra une stabilité polynomiale pour la famille de systèmes

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_h(t) + (1 + h^\theta)^{-2} (I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}})^2 A_h \omega_h(t) \\ \quad + (I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}}) (B_h B_h^* + h^\theta A_h^{1+\frac{l}{2}}) (I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}})^{-1} \dot{\omega}_h(t) = 0, \\ \omega_h(0) = \omega_{0h} \in V_h, \quad \dot{\omega}_h(0) = (1 + h^\theta)^{-1} (I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}}) \omega_{1h} \in V_h. \end{cases} \quad (4.24)$$

Dans le cas  $l = 0$ , nous retrouvons le système (4.19). Ce choix, comme (4.19), est motivé par des estimées d'observabilité correspondantes. Le terme de viscosité numérique  $(I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}}) (B_h B_h^* + h^\theta A_h^{1+\frac{l}{2}}) (I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}})^{-1} \dot{\omega}_h(t)$  est ajouté pour amortir les modes hautes fréquences, et comme l'ensemble des modes hautes fréquences est plus grand dans le cas polynomial, le terme de viscosité est naturellement plus fort. Dans le cas  $l \geq 2$ , les puissances de  $(I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}})$  ont été ajoutées pour garantir la bornitude de la résolvante de  $\tilde{A}_{l,h}$  (l'opérateur du premier ordre associé, défini dans (4.1) de la Section 4 de [3]) proche de zéro. La question de l'optimalité de ces termes de viscosité reste ouvert.

Le second résultat principal de cette section est le suivant.

**Théorème 4.2.2** *Supposons que la condition de gap généralisé (3.15) et l'hypothèse (4.23) sont vérifiées avec  $l \in \mathbb{N}^*$  pair. Supposons que la famille des sous-espaces  $(V_h)$  satisfait (4.17) et (4.18). Alors la famille des systèmes (4.24) est uniformément polynomialement stable, au sens où il existe des constantes  $C, h^* > 0$  (indépendantes de  $h, \omega_{0h}, \omega_{1h}$ ) telles que pour tout  $h \in (0, h^*)$  :*

$$\begin{aligned} \left\| (I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}})^{-1} \dot{\omega}_h(t) \right\|^2 + a(\omega_h(t), \omega_h(t)) &\leq \frac{C}{t^2} \|(\omega_{0h}, \omega_{1h})\|_{D(\tilde{A}_{l,h}^2)}^2, \\ \left\| (I + h^\theta A_h^{\frac{l}{2}})^{-1} \dot{\omega}_h(t) \right\|^2 + a(\omega_h(t), \omega_h(t)) &\leq \frac{C}{t^{\frac{1}{l}}} \|(\omega_{0h}, \omega_{1h})\|_{D(\tilde{A}_{l,h})}^2, \end{aligned}$$

pour tout  $t > 0$ , pour tout  $(\omega_{0h}, \omega_{1h}) \in V_h \times V_h$ , où pour  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|\cdot\|_{D(\tilde{A}_{l,h}^q)}$  est la norme du graphe de l'opérateur matriciel  $\tilde{A}_{l,h}^q$  donné dans (4.1) de la Section 4 de [3].

Pour une raison technique, on suppose  $l$  pair (voir Lemme 4.4 de [3]). Si on a (4.23) pour  $l$  impair, alors on l'a évidemment aussi pour  $l + 1$  et on peut appliquer le résultat précédent avec  $l + 1$ .

**Remarque 4.2.4** Si on a la condition de gap standard (4.21), l'hypothèse (4.23) devient

$$\exists l \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_0 > 0, \forall k_n \geq 1, \forall C \in \mathbb{R}^{l_n}, \quad \|\Phi_{k_n} C\|_U \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_{k_n}^l} \|C\|_2.$$

De plus, si on a la condition de gap standard (4.21) et si les valeurs propres sont simples, l'hypothèse (4.23) devient

$$\exists l \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_0 > 0, \forall k \geq 1, \quad \|B^* \varphi_k\|_U \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_k^l}. \quad (4.25)$$

**Remarque 4.2.5** Comme précédemment, le Théorème 4.2.2 est la version discrète de la décroissance polynomiale des solutions du problème continu (3.3) sous les hypothèses (3.15) et (4.23) (voir la Section 3.1.1).

La première étape pour prouver les Théorèmes 4.2.1 et 4.2.2 consiste à montrer que la condition de gap généralisé (3.15) et les conditions d'observabilité (4.20) et (4.23) restent



vraies pour les problèmes approchés (uniformément en  $h$ ), à condition de considérer seulement les "basses fréquences". Cette étape est basée sur des estimations d'erreurs des valeurs propres et des vecteurs propres de la méthode de Galerkin ([13]). Il faut remarquer que nous avons besoin de plus filtrer les valeurs propres pour obtenir la version discrète de la condition d'observabilité (4.23) du cas polynomial (uniformément en  $h$ ).

Suivant [118] (dans le cas du gap simple (4.21) et de valeurs propres simples), la preuve du Théorème 4.2.1 repose sur le résultat suivant donné dans le Théorème 7.1.3 de [96] :

**Théorème 4.2.3** *Soit  $(T_h)_{h>0}$  une famille de semi-groupes de contractions sur des espaces de Hilbert  $(X_h)_{h>0}$  et soit  $(\tilde{A}_h)_{h>0}$  les générateurs infinitésimaux correspondants. La famille  $(T_h)_{h>0}$  est uniformément exponentiellement stable, c'est à dire qu'il existe des constantes  $M > 0$ ,  $\alpha > 0$  (indépendantes de  $h \in (0, h^*)$ ) telles que*

$$\|T_h(t)\|_{\mathcal{L}(X_h)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i) Pour tout  $h \in (0, h^*)$ ,  $i\mathbb{R}$  est contenu dans l'ensemble résolvant  $\rho(\tilde{A}_h)$  de  $\tilde{A}_h$ ,
- ii)  $\sup_{h \in (0, h^*), \omega \in \mathbb{R}} \|(i\omega - \tilde{A}_h)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_h)} < +\infty$ .

Pour prouver le Théorème 4.2.2, nous montrons, en nous inspirant de [21, 22, 30], un résultat sur la stabilité polynomiale uniforme pour une famille de semi-groupes :

**Théorème 4.2.4** *Soit  $(T_h)_{h \in (0, h^*)}$  une famille de  $C_0$  semi-groupes uniformément bornés sur des espaces de Hilbert associés  $(X_h)_{h \in (0, h^*)}$  et soit  $(\tilde{A}_h)_{h \in (0, h^*)}$  les générateurs infinitésimaux correspondants tels que  $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\tilde{A}_h)$ , pour tout  $h \in (0, h^*)$  et  $\sup_{\substack{h \in (0, h^*) \\ |s| \leq M}} \|R(is, \tilde{A}_h)\|_{\mathcal{L}(X_h)} \leq c$ . Alors pour*

*un  $\alpha > 0$  fixé, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i)

$$\sup_{h \in (0, h^*)} \|R(is, \tilde{A}_h)\| = O(|s|^\alpha), \quad s \rightarrow \infty$$

(ii)

$$\sup_{h \in (0, h^*)} \|T_h(t)\tilde{A}_h^{-\alpha}\| = O(t^{-1}), \quad t \rightarrow +\infty$$

(iii)

$$\sup_{h \in (0, h^*)} \|T_h(t)\tilde{A}_h^{-1}\| = O(t^{\frac{-1}{\alpha}}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Nous donnons également un résultat de convergence : nous montrons que la solution  $\omega_h$  du problème discret (4.24) tend vers la solution  $\omega$  du problème continu (4.13) quand  $h$  tend vers zéro et si les données initiales discrètes sont bien choisies.

**Théorème 4.2.5** *Si  $(\omega_0, \omega_1)^\top \in V \times H$ , alors*

$$\|T_{l,h}(t)(\pi_h \omega_0, j_h \omega_1)^\top - T(t)(\omega_0, \omega_1)^\top\|_{V \times H} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0, \quad (4.26)$$

où  $(T_{l,h}(t))$  (resp.  $(T(t))$ ) est le semi-groupe engendré par l'opérateur du premier ordre associé à (4.24) (resp. (4.13)).

Ce résultat est basé sur une version générale du théorème de Trotter-Kato prouvé dans [79] (Théorème 2.1). L'idée de base est que la convergence des semi-groupes est équivalente à la convergence des résolvantes.

Nous finissons [3] par trois exemples d'applications : deux équations des ondes couplées, deux équations des ondes couplées par le bord et un système de type ondes plus général.

Je vais détailler rapidement ici le premier exemple. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \alpha y(x, t) + \beta(x)u_t(x, t) = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ y_{tt}(x, t) - y_{xx}(x, t) + \alpha u(x, t) + \gamma(x)y_t(x, t) = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, t) = u(1, t) = y(0, t) = y(1, t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, u_t(\cdot, 0) = u_1, y(\cdot, 0) = y_0, y_t(\cdot, 0) = y_1 & \text{dans } (0, 1), \end{cases} \quad (4.27)$$

où  $\alpha > 0$  est assez petit,  $\beta(\cdot)$  et  $\gamma(\cdot)$  sont des fonctions positives ou nulles telles que  $\beta(x) \geq \beta > 0$  pour  $x \in I_\beta \subseteq [0, 1]$  et  $\gamma(x) \geq \gamma > 0$  pour  $x \in I_\gamma \subseteq [0, 1]$  où  $I_\beta$  et  $I_\gamma$  sont deux ouverts dont au moins un est non vide. Ainsi, (4.27) peut s'écrire sous la forme (4.13) avec les choix suivants : prenons  $H = L^2(0, 1)^2$ , l'opérateur  $B$  comme suit :

$$B\omega = \sqrt{\beta(\cdot)} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\gamma(\cdot)} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

où  $\omega = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in H$ , qui est un opérateur borné de  $H$  dans lui même (i.e.  $U = H$ ) et l'opérateur  $A$  défini par

$$D(A) = V \cap H^2(0, 1)^2, \quad \text{avec } V = H_0^1(0, 1)^2,$$

$$A\omega = \begin{pmatrix} -u_{xx} + \alpha y \\ -y_{xx} + \alpha u \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha < \pi^2$ , l'opérateur  $A$  est un opérateur autoadjoint positif dans  $H$ .

On peut vérifier que le spectre de  $A$  est donné par

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_{+,k}^2\}_{k \in \mathbb{N}^*} \cup \{\lambda_{-,k}^2\}_{k \in \mathbb{N}^*},$$

où  $\lambda_{-,k}^2 = k^2\pi^2 - \alpha$ ,  $\lambda_{+,k}^2 = k^2\pi^2 + \alpha$ , que les valeurs propres sont simples et vérifient la condition du gap généralisé (3.15) avec  $M = 2$  (ici  $A_1 = \emptyset$ ,  $A_2 = \mathbb{N}^*$ ). Les vecteurs propres sont donnés par  $\omega_{-,k} = (\sin(k\pi\cdot), -\sin(k\pi\cdot))$  et  $\omega_{+,k} = (\sin(k\pi\cdot), \sin(k\pi\cdot))$ , et forment une base orthonormale de  $H$ . Avec les notations précédentes,

$$B_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda_{+,k} - \lambda_{-,k} \end{pmatrix}, \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} B^*\omega_{-,k} & 0 \\ 0 & B^*\omega_{+,k} \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout  $C = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned} \|B_k^{-1}\Phi_k C\|_{U,2}^2 &= |c_1 + c_2|^2 \int_0^1 \beta(x) \sin^2(k\pi x) dx + |c_2 - c_1|^2 \int_0^1 \gamma(x) \sin^2(k\pi x) dx \\ &\quad + |\lambda_{+,k} - \lambda_{-,k}|^2 |c_2|^2 \int_0^1 (\beta(x) + \gamma(x)) \sin^2(k\pi x) dx. \end{aligned}$$

Si  $I_\beta \neq \emptyset$  et  $I_\gamma \neq \emptyset$ , on obtient (4.20). Tandis que si  $I_\beta = \emptyset$  ou  $I_\gamma = \emptyset$  (mais au moins un est non vide), nous obtenons (4.23) avec  $l = 1$ . Ainsi, dans le premier cas, le système continu (4.27) est exponentiellement stable, tandis que dans le second cas, (4.27) est polynomialement stable (voir [5, 10]).

Comme espace approché  $V_h$ , nous utilisons les éléments finis standards  $P1$ . Plus précisément, pour  $N \in \mathbb{N}$  et  $h = \frac{1}{N+1}$ , on définit les points  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, N+1$ . L'espace  $V_h$  est le sous-espace linéaire engendré par la famille des fonctions chapeaux  $(e_i, e_j)_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$  telles que

$$e_j(x) = \left[ 1 - \frac{|x - x_j|}{h} \right]^+, \quad \text{pour } j = 1, \dots, N.$$

Alors, on définit les opérateurs  $A_h$  et  $B_h$  par (4.14) et (4.16). Il est bien connu (voir [43]) que l'opérateur  $A$  et l'espace  $V_h$  satisfont les conditions (4.17) et (4.18) avec  $\theta = 1$ .

Par conséquent, dans le premier cas ( $I_\beta \neq \emptyset$  et  $I_\gamma \neq \emptyset$ ), on peut appliquer le Théorème 4.2.1 et donc la famille de systèmes (4.19) est uniformément exponentiellement stable, au sens où il existe des constantes  $M, \alpha, h^* > 0$  (indépendantes de  $h, u_{0h}, u_{1h}, y_{0h}, y_{1h}$ ) telles que pour tout  $h \in (0, h^*)$  :

$$\|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + a(\omega_h(t), \omega_h(t)) \leq Me^{-\alpha t} (\|\omega_{1h}\|^2 + a(\omega_{0h}, \omega_{0h})), \forall t \geq 0,$$

où  $\omega_h = (u_h, y_h)$ , et  $\omega_{0h} = (u_{0h}, y_{0h}) \in V_h$  (resp.  $\omega_{1h} = (u_{1h}, y_{1h}) \in V_h$ ) est une approximation de  $\omega_0 = (u_0, y_0)$  (resp.  $\omega_1 = (u_1, y_1)$ ).

Dans le second cas ( $I_\beta = \emptyset$  et  $I_\gamma \neq \emptyset$ , la première équation de (4.27) étant alors indirectement stabilisée par la deuxième), on peut appliquer le Théorème 4.2.2 avec  $l = 2$  et donc la famille de systèmes (4.24) est uniformément polynomialement stable, au sens où il existe des constantes  $C, h^* > 0$  (indépendantes de  $h, u_{0h}, u_{1h}, y_{0h}, y_{1h}$ ) telles que pour tout  $h \in (0, h^*)$  :

$$\|(I + hA_h)^{-1}\dot{\omega}_h(t)\|^2 + a(\omega_h(t), \omega_h(t)) \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|(\omega_{0h}, \omega_{1h})\|_{D(\bar{A}_{2h})}^2 \forall t > 0. \quad (4.29)$$

L'hypothèse  $B$  borné n'autorise pas les applications aux systèmes d'EDPs stabilisées par le bord. Enlever cette restriction reste un problème ouvert, la technique de domaines fréquentiels utilisée ici ne s'appliquant pas dans le cas d'opérateurs non bornés.

Dans [6], les auteurs considèrent une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires, donnent des taux de décroissance pour le système continu et construisent des schémas de discrétisation (en espace, en temps ou pour les deux), en ajoutant des termes de viscosité appropriés, qui conservent ces taux de convergence, uniformément par rapport aux paramètres de discrétisation. Leur travail est basé sur des méthodes de convexité et des inégalités d'observabilité uniformes. Ils appliquent ces résultats à l'équation de Schrödinger avec amortissement non linéaire, l'équation des ondes non linéaire, l'équation des plaques non linéaire, l'équation de transport non linéaire et à certaines classes d'équations avec des termes non locaux. Il serait donc intéressant de généraliser nos résultats ([3]) à d'autres types de problèmes, par exemple non linéaires. La semi-discrétisation en temps et la discrétisation à la fois en temps et en espace restent également à traiter.

### 4.3 Approximations numériques d'une classe de problèmes de contrôle optimal en temps

Cette section fait référence à l'article [134] ([TVW19]), qui a été écrit en collaboration avec Marius Tucsnak et Chi-Ting Wu (Nancy), pendant son doctorat que je co-encadrais avec Marius Tucsnak. Il contient des résultats qui ont été partiellement annoncés dans un acte de conférences [133] (European Control Conference (ECC) 2015) ([TVW15]).

Le contrôle optimal en temps de systèmes de dimension infinie est un sujet qui a un intérêt grandissant, motivé par des applications nombreuses dans des domaines comme le guidage de systèmes complexes ou la régulation de la température dans de grands immeubles.

Le but de cette section est d'étudier l'approximation des solutions de problèmes de contrôle optimal en temps (interne ou au bord) pour une classe de systèmes linéaires de dimension infinie en projetant le problème de départ sur une famille appropriée d'espaces

de dimension finie. C'est une question délicate car les contrôles en temps optimal sont généralement des fonctions fortement oscillantes (à cause de la propriété de bang-bang). A notre connaissance, les seuls travaux s'intéressant à ces questions sont [85, 140, 141] qui considèrent l'approximation par éléments finis de l'équation de la chaleur avec contrôles internes (et non au bord).

Soit  $X$  et  $U$  des espaces de Hilbert réels, et soit  $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow X$  un opérateur strictement positif. Il est connu que  $-A_0$  génère un semi-groupe analytique exponentiellement stable, noté  $\mathbb{T}_t$ . On note par  $\|\cdot\|$  (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) la norme (resp. le produit scalaire) sur  $X$ . Pour  $\gamma > 0$  on note par  $X_\gamma$  l'espace  $\mathcal{D}(A_0^\gamma)$ , muni de la norme du graphe. Pour  $\gamma < 0$ ,  $X_\gamma$  est le dual de  $X_{-\gamma}$  par rapport à l'espace pivot  $X$ . On introduit aussi un opérateur  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-\alpha})$  avec  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , appelé *opérateur de contrôle*. Dans cette section on considère les systèmes de la forme

$$\dot{z}(t) + A_0 z(t) = Bu(t) \quad (t \geq 0), \quad (4.30)$$

$$z(0) = z_0 \quad (z_0 \in X), \quad (4.31)$$

où  $u \in L^\infty([0, +\infty); U)$  est la fonction d'entrée et  $z$  est la trajectoire d'état. Il est bien connu (par exemple en combinant le Théorème 4.4.3 et la Proposition 5.1.3 de [135]) que si  $z_0 \in X$  et  $u \in L^\infty([0, +\infty); U)$ , il existe une solution unique  $z \in C([0, +\infty); X)$  de (4.30)-(4.31) et  $z$  satisfait

$$z(t) = \mathbb{T}_t z_0 + \Phi_t u, \quad \text{où} \quad \Phi_t u = \int_0^t \mathbb{T}_{t-\sigma} B u(\sigma) d\sigma. \quad (4.32)$$

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, on note par  $\bar{B}(0, \varepsilon)$  la boule fermée de  $X$  centrée en zéro et de rayon  $\varepsilon$ . On considère le problème de contrôle en temps optimal qui s'énonce comme suit :

(TP) Déterminer  $\tau_0^* > 0$  tel que

$$\tau_0^* = \min\{\tau \geq 0 \mid \text{il existe } u \in L^\infty([0, +\infty); U) \text{ t.q. } \|u\|_{L^\infty([0, +\infty); U)} \leq 1 \text{ et } z(\tau) \in \bar{B}(0, \varepsilon)\},$$

et les contrôles optimaux correspondants  $u_0^*$ .

Posons

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{u \in L^\infty([0, +\infty); U) \mid \|u\|_{L^\infty([0, +\infty); U)} \leq 1\}. \quad (4.33)$$

Il est bien connu que le temps optimal  $\tau_0^*$  et le contrôle optimal  $u_0^*$  existent sous des hypothèses supplémentaires (voir, par exemple, [101]).

Soit  $(V_h)_{h>0}$  (resp.  $(U_h)_{h>0}$ ) une famille de sous-espaces de dimension finie de  $X_{\frac{1}{2}}$  (resp.  $U$ ), qui sont des espaces normés quand on les munit de la restriction de la norme de  $X_{\frac{1}{2}}$  (resp.  $U$ ). On note  $P_h$  (resp.  $Q_h$ ) la projection orthogonale de  $X$  sur  $V_h$  (resp. de  $U$  sur  $U_h$ ). Pour chaque  $h > 0$ , on considère le système suivant :

$$\dot{z}_h(t) + A_h z_h(t) = B_h u_h(t) \quad (t \geq 0), \quad (4.34)$$

$$z_h(0) = P_h z_0, \quad (4.35)$$

où  $u_h \in L^\infty([0, +\infty); U_h)$ ,  $(A_h)_{h>0}$  est défini par

$$\langle A_h \varphi, \psi \rangle = \langle A_0^{\frac{1}{2}} \varphi, A_0^{\frac{1}{2}} \psi \rangle \quad (\varphi, \psi \in V_h), \quad (4.36)$$

et  $B_h \in \mathcal{L}(U, V_h)$  est défini par

$$\langle B_h u, \varphi \rangle = \langle u, B^* \varphi \rangle_U \quad (\varphi \in V_h, u \in U). \quad (4.37)$$

Le système ci-dessus est l'approximation de Galerkin de (4.30)-(4.31), et sa solution  $z_h$  peut s'écrire comme

$$z_h(t) = \mathbb{T}_{t,h} P_h z_0 + \Phi_{t,h} u_h, \quad \text{où} \quad \Phi_{t,h} u_h = \int_0^t \mathbb{T}_{t-\sigma,h} B_h u_h(\sigma) d\sigma, \quad (4.38)$$

où  $\mathbb{T}_{t,h} = \exp(-tA_h)$  est le semi-groupe engendré par  $A_h$ . Notons par  $\bar{B}_h(0, \varepsilon)$  la boule fermée de  $V_h$  centrée en zéro avec rayon  $\varepsilon$ . Pour chaque  $h > 0$ , on considère le problème de contrôle en temps optimal pour le système (4.34)-(4.35) qui s'énonce comme suit :

(**TP<sub>h</sub>**) Déterminer  $\tau_h^* > 0$  tel que

$$\tau_h^* = \min\{\tau \geq 0 \mid \text{il existe } u_h \in L^\infty([0, +\infty); U_h) \text{ t.q. } \|u_h\|_{L^\infty([0, +\infty); U_h)} \leq 1 \text{ et } z_h(\tau) \in \bar{B}_h(0, \varepsilon)\},$$

et les contrôles optimaux correspondants  $u_h^*$  dans l'ensemble admissible  $\mathcal{U}_{\text{ad},h}$ , où  $\mathcal{U}_{\text{ad},h}$  est défini par

$$\mathcal{U}_{\text{ad},h} = \{u \in L^\infty([0, +\infty); U_h) \mid \|u\|_{L^\infty([0, +\infty); U_h)} \leq 1\}. \quad (4.39)$$

Le but de ce travail est d'étudier la convergence de  $\tau_h^*$  vers  $\tau_0^*$  et de  $u_h^*$  vers  $u_0^*$  quand  $h \rightarrow 0$ . Pour faire ceci, nous avons besoin d'hypothèses appropriées sur les propriétés d'approximation des espaces  $(V_h)_{h>0}$  et  $(U_h)_{h>0}$ . Plus précisément, on suppose qu'il existe  $\theta > 0$ ,  $h_1 > 0$ ,  $C > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_1)$  et  $0 \leq \gamma \leq 1$  on a :

$$(C1) \quad \|x - P_h x\| \leq Ch^{\theta\gamma} \|x\|_\gamma \text{ pour tout } x \in X_\gamma,$$

$$(C2) \quad A_h \text{ est uniformément analytique (par rapport à } h),$$

$$(C3) \quad \|(I - P_h)B\|_{\mathcal{L}(U, X)} \leq Ch^{\theta(1-\alpha)},$$

$$(C4) \quad \|P_h B\|_{\mathcal{L}(U, V_h)} \leq Ch^{-\theta\alpha},$$

$$(C5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|Q_h u - u\|_U = 0 \text{ pour tout } u \in U,$$

où  $\alpha$  représente le degré de non bornitude de l'opérateur  $B$  (introduit au début de cette section).

Les résultats principaux de cette section sont les suivants.

**Théorème 4.3.1** Avec les notations et hypothèses sur les opérateurs  $A_0, B, A_h, B_h$ , supposons (C1)-(C5) et que  $z_0 \in X$ ,  $\|z_0\| > \varepsilon$ . Alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_h^* = \tau_0^*$ .

**Théorème 4.3.2** Avec les notations et hypothèses sur les opérateurs  $A_0, B, A_h, B_h$ , supposons (C1)-(C5) et que le seul  $\eta \in X$  pour lequel il existe un intervalle ouvert non vide  $I$  avec  $B^* \mathbb{T}_t^* \eta = 0$  pour  $t \in I$  est  $\eta = 0$ . Alors on a

$$u_h^* \rightarrow u_0^* \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; U),$$

où  $T = 2 \frac{\ln(\|z_0\|/\varepsilon)}{\lambda_1}$  ( $\lambda_1$  étant la première valeur propre de l'opérateur  $A_0$ ) et en étendant  $(u_h^*)_h$  et  $u_0^*$  jusqu'au temps  $T$  par zéro.

Nous pouvons remarquer que des résultats similaires de convergence ont été obtenus dans [85] et [141]. Dans [85], l'espace de contrôle est pris sur des sous-espaces de  $U$  de dimension finie et dans [141] la donnée initiale  $z_0$  est prise dans  $X_{\frac{1}{2}}$  et avec un opérateur borné  $B$ , ce qui ne peut pas s'appliquer à des problème de contrôle au bord. Nos résultats peuvent être vus comme une généralisation de ceux obtenus dans [141], au sens où l'on considère une classe de problèmes abstraits incluant des système d'EDPs. La nouveauté de

nos résultats est que l'on affaiblit les hypothèses de régularité des données initiales avec  $z_0 \in X$  et aussi les hypothèses de l'opérateur de contrôle  $B$  avec  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-\alpha})$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ .

Les preuves des Théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 sont basées sur des résultats d'estimations d'erreurs de systèmes paraboliques abstraits pour des données initiales non régulières (fortement inspirés de [91] et [14]), un théorème d'Aubin-Lions généralisé (voir [128]) et d'une estimée d'énergie standart.

Ces résultats peuvent s'appliquer à l'équation de la chaleur avec contrôle interne et conditions au bord de Dirichlet, discrétisée par la méthode des éléments finis  $P_1$  standart avec triangulation régulière  $\mathcal{T}_h$ , mais également à l'équation de la chaleur avec contrôle au bord de type Neumann. Plus précisément, soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné avec un bord  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ . On considère l'équation de la chaleur

$$\dot{z}(x, t) - \Delta z(x, t) = 0 \quad (x \in \Omega, t \geq 0), \quad (4.40)$$

avec conditions initiale et au bord

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}(x, t) = u(x, t) \quad (x \in \partial\Omega, t \geq 0), \quad (4.41)$$

$$z(x, 0) = z_0(x) \in L^2(\Omega) \quad (x \in \Omega). \quad (4.42)$$

Il est connu que le système (4.40)-(4.42) peut s'écrire sous la forme (4.30)-(4.31) en prenant  $X = L^2(\Omega)$ ,  $U = L^2(\partial\Omega)$ ,  $D(A_0) = \left\{ z \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$ ,  $A_0 = -\Delta$  et l'opérateur de contrôle  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-\alpha})$  (ici  $\alpha = \frac{1}{4} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ) défini par

$$Bu = A_0 Nu \quad (u \in U),$$

où  $N$  est l'application Neumann. Cette application est définie par  $Nv = z$ , où  $z \in L^2(\Omega)$  est l'unique solution de l'équation elliptique non homogène

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = v & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.43)$$

On réfère à [90, Par. 5] qui montre que l'approximation semi-discrétisée de Galerkin de (4.40)-(4.42) satisfait les conditions (C1) – (C5) (et pour d'autre méthodes d'approximations numériques).

On obtient le résultat suivant :

**Proposition 4.3.1** *Avec les notations précédente, soit, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $z_0 \in X$  tel que  $\|z_0\| > \varepsilon$ . Alors  $\tau_h^* \rightarrow \tau_0^*$ , et  $u_h^* \rightarrow u_0^*$  dans  $L^2([0, T]; L^2(\partial\Omega))$ .*

On peut illustrer dans la suite des résultats numériques pour l'équation 1d de la chaleur avec conditions au bord de Neumann. Plus précisément, on prend  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\epsilon = 1$  (le rayon de la boule cible), les contraintes du contrôle  $|u(t, 0)| \leq 1$  et  $|u(t, 1)| \leq 1$  et les données initiales  $z_0(x) = 5\sin(\pi x)$ . On choisit de discrétiser totalement le système, avec la méthode d'Euler implicite en temps et le schéma aux différences finies en espace. On utilise aussi le solver d'optimisation IPOPT de Matlab.

Nous obtenons les résultats suivants :

Nombre de pas de discrétisation	10	20	40	60	80	100
temps optimal	1.3442	1.3469	1.3464	1.3459	1.3456	1.3454

De plus, on trouve que  $u_h(t, 0) = u_h(t, 1) = -1$  pour tout  $t > 0$  et pour tout pas de discrétisation, ce qui valide le fait que le contrôle en temps optimal pour le système discret converge vers le contrôle en temps optimal bang-bang.

Les estimations d'erreurs de la convergence du temps et du contrôle restent à étudier (voir [29] dans le cas de discrétisation en espace et en temps)



## Chapitre 5

# Conclusion : travaux en cours et perspectives

Je vais donner dans cette dernière partie des perspectives de recherche : travaux en cours ou à plus long terme. Tout au long de ce manuscrit, j'ai donné quelques problèmes ouverts que je trouvais intéressants, dans la continuité des travaux présentés ici. Je vais maintenant développer plus longuement d'autres pistes de recherche.

### 5.1 Un problème inverse sur un réseau pour l'équation de la chaleur

Nous considérons tout d'abord un problème inverse sur un réseau en forme d'arbre. Pour simplifier, nous pouvons tout d'abord nous limiter à des réseaux en forme d'étoile.

Le problème inverse consiste à retrouver le coefficient de diffusion  $c = c(x)$  de l'équation de la chaleur

$$u_t - (c(x)u_x)_x = 0$$

à partir de mesures internes ou au bord de la solution  $u(x, t)$ . Ce problème a été étudié dans plusieurs travaux (voir par exemple [28]). La nouveauté ici est que l'on se place sur une étoile. Notre but est d'obtenir des estimées de stabilité avec un choix de mesures pertinent.

Des estimées de stabilité pour la détermination d'un potentiel dans l'équation de la chaleur et l'équation de Schrödinger (resp. dans l'équation des ondes) sur un arbre ont été données dans [75] (resp. dans [24] détaillé en Section 2.5).

Pour être plus précise, considérons un réseau en forme d'étoile  $\mathcal{R}$  de  $n + 1$  branches  $e_j$  de longueurs respectives  $l_j > 0, j \in \{0, \dots, n\}$ , reliées à un sommet que nous supposons être l'origine de toutes les branches.

Pour tout  $T > 0$  donné, on définit  $Q = (0, T) \times \mathcal{R}$ . Sur ce réseau 1-D plan, on considère l'équation de la chaleur avec coefficients de diffusion variables, donné par le système suivant

$$\begin{cases} u_{j,t}(x, t) - (c_j(x)u_{j,x}(x, t))_x = g_j(x, t), & j \in \{0, \dots, n\}, (x, t) \in (0, l_j) \times (0, T), \\ u_j(l_j, t) = h_j(t), & j \in \{0, \dots, n\}, t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (5.1)$$

avec les conditions de continuité et la loi de Kirchhoff au sommet 0, à savoir

$$u_j(0, t) = u_i(0, t) =: u(0, t), \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, 0 < t < T, \quad (5.2)$$



$$[cu_x(t)]_0 := \sum_{j=0}^n c_j(0)u_{j,x}(0,t) =: k(t), \quad 0 < t < T. \quad (5.3)$$

Le coefficient de diffusion  $c$  est supposé être  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, i.e.  $c_i \in \mathcal{C}^1([0, l_i])$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , et

$$0 < c_{\min} \leq c(x) \leq c_{\max}, \quad x \in \mathcal{R}. \quad (5.4)$$

Nous utiliserons ici les notations de la Section 2. On note aussi par  $L$  l'opérateur  $L := -\partial_t + \partial_x(c\partial_x)$  dans  $Q$  et  $L^*$  son adjoint formel, à savoir  $L^* := \partial_t + \partial_x(c\partial_x)$  dans  $Q$ . De plus, soit  $A$  l'opérateur auto-adjoint  $Au := -\partial_x(c\partial_x)$  avec  $D(A) := \{u \in H_0^1(\mathcal{R}), Au \in L^2(\mathcal{R}), [cu_x]_0 = 0\}$ .

Notre premier résultat concerne des estimées de stabilité avec mesures internes, qui pourrait s'énoncer ainsi :

Soit  $T > 0$ ,  $T' = T/2$  et  $\omega \subset \mathcal{R}$  un ouvert avec  $\omega \cap (0, l_j) \neq \emptyset$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $\tilde{c}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux vérifiant (5.4). Soit  $h_j = 0$  pour  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Alors pour tout  $u^0 \in L^2(\mathcal{R})$ , il existe  $g \in C_c^\infty(\omega \times (0, T))$  tel que pour toute fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $c$  satisfaisant (5.4),

$$c_i(0) = \tilde{c}_i(0) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\},$$

et  $\|c\|_{W^{1,\infty}} \leq c_{\max}^{1,\infty}$ , si  $u$  et  $\tilde{u}$  sont les solutions de (5.1), (5.2) et (5.3) associées à  $c$  et  $\tilde{c}$  respectivement, et  $g$ , on a

$$\begin{aligned} \|c - \tilde{c}\|_{L^2(\mathcal{R})} &\leq C \left( \|u_t - \tilde{u}_t\|_{L^2(\omega \times (0, T))} + \|u_{tt} - \tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \right. \\ &\quad \left. + \|u_t(T') - \tilde{u}_t(T')\|_{L^2(\omega)} + \|u(T') - \tilde{u}(T')\|_{H^1(\mathcal{R})} + \|u(T') - \tilde{u}(T')\|_{H^2(\omega)} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Notons qu'il y a seulement  $n$  mesures internes pour  $n + 1$  branches du réseau.

Notre second résultat principal concernerait les estimées de stabilité avec mesures au bord :

Soit  $T > 0$ ,  $T' = T/2$  et  $\tilde{c}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux satisfaisant (5.4). Alors pour tout  $u^0 \in L^2(\mathcal{R})$ , il existe des fonctions  $h_j \in C_c^\infty(0, T)$ ,  $j \in \{0, \dots, n\}$  telles que pour tout  $c \mathcal{C}^1$  par morceaux vérifiant (5.4),

$$\begin{aligned} c_i(0) &= \tilde{c}_i(0) & \forall i \in \{0, \dots, n\}, \\ c_i(l_i) &= \tilde{c}_i(l_i) & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

et  $\|c\|_{W^{1,\infty}} \leq c_{\max}^{1,\infty}$ , si  $u$  et  $\tilde{u}$  sont les solutions respectives de (5.1), (5.2) et (5.3) associées à  $c$  et  $\tilde{c}$  respectivement, avec  $g \equiv 0$  et  $\tilde{u}^0 = u^0$ , on a

$$\begin{aligned} \|c - \tilde{c}\|_{L^2(\mathcal{R})} &\leq C \left( \sum_{j=1}^n \left[ \|u_{tx}(l_j) - \tilde{u}_{tx}(l_j)\|_{L^2(0, T)} + \|u_{ttx}(l_j) - \tilde{u}_{ttx}(l_j)\|_{L^2(0, T)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n |u_{j,x}(l_j, T') - \tilde{u}_{j,x}(l_j, T')|^2 + \|u(T') - \tilde{u}(T')\|_{H^1(\mathcal{R})} \right). \end{aligned}$$

Notons qu'il y a également seulement  $n$  mesures au bord pour  $n + 1$  branches du réseau.

Cette approche est en cours d'investigation avec Emmanuelle Crépeau et Lionel Rosier (Université du Littoral Côte d'Opale). L'idée est de prouver des inégalités de Carleman dans  $L^2(\mathcal{R})$  d'abord avec mesures internes, puis avec mesures au bord, avec des choix de poids appropriés, dans le même esprit que dans la Section 2.5 ([24]). Puis on donne des estimées de Carleman avec un terme source dans  $H^{-1}(\mathcal{R})$  dans les deux cas, en nous inspirant de [62, 76, 117]. Les résultats de stabilité  $L^2(\mathcal{R})$  sont alors donnés pour un problème stationnaire (à un temps  $T'$  fixé), puis pour le problème d'évolution. Nous pourrions par la suite

généraliser ces résultats à un arbre quelconque. Enlever l'hypothèse d'égalité au noeud central des coefficients de diffusion  $c$  et  $\tilde{c}$  semble être un problème difficile actuellement, ainsi que le cas de réseau avec circuit ou avec moins de mesures.

## 5.2 EDP avec amortissement échantillonné

Récemment, Lucie Baudouin, Swann Marx et Sophie Tarbouriech (LAAS, Toulouse) se sont intéressés dans l'acte de conférences [26] à l'équation linéaire des ondes avec un amortissement échantillonné. L'objectif est de trouver une loi d'échantillonnage appropriée pour les instants  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans le but de conserver la stabilité exponentielle du système en boucle fermée

$$\begin{cases} \partial_t^2 z(t, x) - \Delta z(t, x) = -\alpha \partial_t z(t_k, x), & (t, x) \in [t_k, t_{k+1}[ \times \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, \\ z(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ z(0, x) = z_0(x), \partial_t z(0, x) = z_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ . Cela signifie que le signal n'est pas transmis à l'actionneur de manière continue, mais est mis à jour à certains instants  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui forment une suite strictement croissante de scalaires positifs. Le contrôle est donc constant entre deux instants successifs  $t_k$  et  $t_{k+1}$ . L'échantillonnage peut être vu ici comme un retard dans le terme de damping.

L'intervalle d'échantillonnage  $t_{k+1} - t_k$  n'est pas supposé constant et la loi d'échantillonnage est choisie avec attention pour éviter le phénomène Zéno et assurer la décroissance exponentielle de l'énergie. En notant  $e_k$  la variation donnée par la formule

$$e_k(t, \cdot) := \partial_t z(t, \cdot) - \partial_t z(t_k, \cdot), \text{ dans } \Omega, \forall t \in [t_k, t_{k+1}[ , \quad (5.7)$$

les instants d'échantillonnage sont déterminés comme suit :

$$t_{k+1} := \inf \left\{ t \geq t_k, \|e_k(t)\|_{L^2}^2 - \gamma_0 \|z(t)\|_{L^2}^2 - \gamma_1 \|\partial_t z(t)\|_{L^2}^2 - E(0)e^{-\theta t} \geq 0 \right\}, \quad (5.8)$$

où  $\gamma_0, \gamma_1$  et  $\theta$  sont des constantes positives à définir. Le dernier terme dans (5.8) (c'est à dire  $E(0)e^{-\theta t}$ ) est là pour assurer l'absence de phénomène Zéno et donc l'existence de solutions (par récurrence). Par contre, ce terme donne une dépendance par rapport aux données initiales de la loi d'échantillonnage. L'enlever est à mon sens une amélioration qui mériterait d'être étudiée, mais qui ne semble pas triviale. Les auteurs de [26] obtiennent la décroissance exponentielle de l'énergie sous une hypothèse restrictive du domaine  $\Omega$  (qui pourrait être à mon sens supprimée) en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov appropriée.

A court terme, nous allons, avec Lucie Baudouin, Swann Marx et Sophie Tarbouriech, considérer le cas d'un feedback échantillonné au bord. Plus précisément considérons, pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) un ouvert borné avec un bord  $\Gamma$  de classe  $C^2$  où  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , avec  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$  et  $\Gamma_D \neq \emptyset$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = -\alpha \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_k) \chi_{\Gamma_N} & \text{sur } \Gamma_N \times [t_k, t_{k+1}[ , k \in \mathbb{N}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.9)$$

Ce système est à approcher de (3.33) où nous avons un feedback classique (avec un retard en plus). Sous les hypothèses (3.34)-(3.35), sous la loi d'échantillonnage

$$t_{k+1} := \inf \left\{ t \geq t_k, \|e_k(t)\|_{L^2}^2 - \gamma \|\partial_t z(t)\|_{L^2(\Gamma_N)}^2 - E(0)e^{-\theta t} \geq 0 \right\}, \quad (5.10)$$

et en utilisant une fonctionnelle appropriée, on doit pouvoir montrer l'existence et la décroissance exponentielle de l'énergie. Par contre travailler sur un domaine plus général mérite d'être davantage exploré, comme enlever le dernier terme  $E(0)e^{-\theta t}$  dans la loi d'échantillonnage. Des tests numériques peuvent nous être utiles pour conforter nos intuitions, comparer l'énergie des solutions avec amortissement classique, amortissement échantillonné de manière périodique ou amortissement échantillonné avec la loi (5.10), le comportement de la suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}, \dots}$ .

Une deuxième étape dans cette direction pourrait être de considérer des systèmes abstraits plus généraux avec feedback non borné échantillonné, semblable à la Section 3.1.2 :

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A\omega(t) + BB^*\dot{\omega}(t_k) = 0, & t \in [t_k, t_{k+1}[ \\ \omega(0) = \omega_0, & \dot{\omega}(0) = \omega_1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Le système (5.9) entre dans ce cadre abstrait, ainsi que l'équation des poutres ou l'équation des plaques avec feedbacks au bord (ou interne) échantillonnés. Même s'il me semble que l'on pourrait choisir une fonctionnelle de Lyapunov abstraite appropriée dans le même esprit que (3.29) vérifiant de bonnes hypothèses, l'existence ne semble pas être une simple généralisation de celle faite dans [26]. En effet, il nous manque actuellement de la régularité pour faire le raisonnement par récurrence.

### 5.3 Un observateur adaptatif

Je vais maintenant mentionner un début de travail en cours en collaboration avec Karim Ramdani et Jean-Claude Vivalda. On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) f_i \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (5.12)$$

où :

- $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe défini sur un espace de Hilbert  $X$  ;
- $C$  est un opérateur borné sur  $X$  ;
- les fonctions  $\lambda_i$  sont des fonctions connues ;
- les  $f_i$  sont des éléments de  $X$  inconnus.

On voudrait construire pour ce système un observateur adaptatif, i.e. un observateur qui donne à la fois une estimation de l'état et une estimation des inconnues  $f_i$ . Dans ce qui suit, nous allons supposer que :

- la paire  $(A, C)$  est exactement observable et qu'il existe un opérateur  $K$  tel que  $A - KC$  soit le générateur d'un semi-groupe, noté  $\mathbb{T}_t$ , exponentiellement stable. Il existe donc des constantes  $k_1 > 0$  et  $\alpha_1 > 0$  telles que  $\|\mathbb{T}_t z\| \leq k_1 \|z\| e^{-\alpha_1 t}$  pour tout  $t \geq 0$  et tout  $z \in X$ . Dans la suite nous noterons  $A_K$  l'opérateur  $A - KC$ .
- les fonctions  $\lambda_i$  sont continues, périodiques et admettent une période commune.

Tout d'abord, nous introduisons des opérateurs qui interviendront dans la définition de l'observateur. Les opérateurs  $\Gamma_i$  dépendent du temps et sont définis par la formule

$$\Gamma_i(t)z = \int_0^t \lambda_i(s) \mathbb{T}_{t-s} z \, ds.$$

Pour  $t$  fixé,  $\Gamma_i(t)$  est un opérateur borné (uniformément par rapport à  $t$ ) et il est uniformément continu par rapport à  $t$ . Notons enfin que nous avons

$$\frac{d\Gamma_i(t)}{dt} z = A_K \Gamma_i(t) z + \lambda_i(t) z.$$

Nous considérons le système auxiliaire suivant, tiré de [145]

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) \hat{f}_i + \left( K + \sum_{i=1}^N \Gamma_i \Gamma_i^* C^* \right) (y - C\hat{z}) \\ \dot{\hat{f}}_i &= \Gamma_i^* C^* (y - C\hat{z}), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (5.13)$$

Nous posons  $e = \hat{z} - z$  et  $\varphi_i = \hat{f}_i - f_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). L'équation d'erreur pour  $e$  est alors

$$\dot{e} = Ae + \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) \varphi_i - \left( K + \sum_{i=1}^N \Gamma_i \Gamma_i^* C^* \right) e.$$

Posons  $\eta = e - \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \varphi_i$ . Alors il est facile de prouver que  $\eta(t)$  tend exponentiellement vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. Pour prouver la convergence de l'observateur (5.13), il suffit de prouver la convergence des  $\varphi_i$  vers 0. Nous avons

$$\dot{\varphi}_i = \dot{\hat{f}}_i = -\Gamma_i^* C^* C e = -\Gamma_i^* C^* C \left( \sum_{j=1}^N \Gamma_j \varphi_j + \eta \right). \quad (5.14)$$

Dans cette équation, nous savons déjà que  $\eta$  tend exponentiellement vers zéro. Pour montrer que les  $\varphi_i$  tendent vers 0, il suffirait donc de montrer que les solutions de l'équation sans second membre

$$\dot{\phi}_i = -\Gamma_i^* C^* C \sum_{j=1}^N \Gamma_j \phi_j \quad (5.15)$$

tendent exponentiellement vers zéro.

Notons que, puisque  $C$  est supposé borné et que les  $\Gamma_i$  sont continus et uniformément bornés, les solutions des équations (5.14) et (5.15) sont définies et continues sur tout  $\mathbb{R}$  et pour toute condition initiale prise dans  $X$ .

Les  $\phi_i$  satisfont le système suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma_1^* C^* C \Gamma_1 & \dots & -\Gamma_1^* C^* C \Gamma_N \\ \dots & \dots & \dots \\ -\Gamma_N^* C^* C \Gamma_1 & \dots & -\Gamma_N^* C^* C \Gamma_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\Gamma_C(t)$  défini de  $X^N$  dans  $Y$  par

$$\Gamma_C : \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^N C \Gamma_i \phi_i.$$

L'application  $t \mapsto \Gamma_C(t)$  est continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathcal{L}(X^N, Y)$  et l'adjoint de  $\Gamma_C$  est défini par

$$\Gamma_C^* y = \begin{pmatrix} \Gamma_1^* C^* y \\ \vdots \\ \Gamma_N^* C^* y \end{pmatrix}.$$

En notant  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)^T \in X^N$ , le système d'équations (5.15) peut s'écrire sous la forme plus compacte suivante

$$\dot{\phi} = -\Gamma_C^* \Gamma_C \phi. \quad (5.16)$$

Nous pouvons montrer, similairement à [145], que, si les  $\lambda_i$  vérifient une hypothèse d'excitation persistante, alors les solutions de l'équation (5.16) tendent exponentiellement vers 0.

**Proposition 5.3.1** *S'il existe des temps  $t_0, T > 0$  et une constante  $m > 0$  tels que pour tout  $\phi \in X^N$ , et tout  $t \geq t_0$*

$$\int_t^{t+T} \|\Gamma_C(s)\phi\|^2 ds \geq m \sum_{i=1}^N \|\phi_i\|^2$$

*alors les fonctions  $t \mapsto \varphi_i(t)$  solutions de l'équation (5.14) tendent exponentiellement vers 0.*

Le critère ci-dessus est appelé critère d'excitation persistante. Ce critère est difficile à vérifier en pratique. Il serait donc utile de le remplacer par un critère plus facile à vérifier. On pourrait également se restreindre à des fonctions  $\lambda_i$  particulières (des Dirac en temps pour commencer) ou chercher les fonctions  $\lambda_i$  dans un espace de dimension finie.

## 5.4 Identifiabilité pour l'équation de Korteweg-de Vries

L'équation de KdV  $y_t(t, x) + y_{xxx}(t, x) + y_x(t, x) + y(t, x)y_x(t, x) = 0$  modélise la propagation d'une vague dans un canal de relativement faible profondeur et de fond plat, où  $y(t, x)$  représente la hauteur de la vague au temps  $t$  à la position  $x$ . Si nous considérons que le fond du canal n'est plus plat, en notant  $h(x)$  la fonction décrivant les variations du fond du canal, le modèle devient (voir par exemple [69])

$$y_t(t, x) + h^2(x)y_{xxx}(t, x) + \left( \sqrt{h(x)}y(t, x) \right)_x + \frac{1}{\sqrt{h(x)}}y(t, x)y_x(t, x) = 0.$$

Il paraît donc intéressant de considérer des coefficients variables dans l'équation de KdV pour modéliser la propagation de vagues dans des canaux non plats. Le problème inverse que j'ai envie d'étudier est de retrouver des informations sur la topographie du canal (c'est à dire  $h$ ) en faisant des mesures au bord de la vague (c'est à dire  $y$ ).

Une première étape a été faite dans [23], où une estimation de Carleman globale pour le problème linéarisé a été donnée. Ils obtiennent alors la stabilité Lipschitz du problème inverse consistant à retrouver le coefficient principal de l'équation de KdV par des mesures au bord. Le coefficient principal est supposé ici être régulier.

En utilisant le modèle de KdV sur un arbre (voir (2.61) de la Section 2.4, ou [40]), je pourrais faire une étude similaire (consistant à retrouver le coefficient principal, régulier, par des mesures au bord) dans le cas d'un arbre. Il faudrait pour cela obtenir une estimation de Carleman globale sur le réseau. L'étude faite en Section 2.5 (voir aussi [24]) pour l'équation des ondes sur des arbres pourrait éventuellement m'aider.

Récemment, Emmanuelle Crépeau dans [48], a proposé un modèle de l'équation de KdV avec un coefficient principal constant par morceaux, modélisant la propagation d'une vague dans un canal où le fond a des sauts brusques. Elle a obtenu la contrôlabilité exacte au bord de cette équation, tout d'abord pour l'équation linéarisée en donnant une inégalité d'observabilité (obtenue par les multiplicateurs), puis pour l'équation non linéaire par point fixe.

Je pourrais donc considérer un problème inverse consistant à retrouver le coefficient principal, cette fois ci constant par morceaux, ce qui correspondrait à l'équation de KdV sur une série de canaux. L'idée serait ensuite de généraliser cela à une étoile, puis à un arbre quelconque.

Ces problèmes inverses pourraient avoir d'autres applications. Par exemple, le flux de sang dans une portion d'artère peut être modélisé par l'équation de KdV (voir [49]). Déterminer le flux à l'entrée de l'artère avec une mesure à la sortie, déterminer la rigidité des artères, retrouver la pression sanguine à la sortie du coeur avec une mesure de pression au doigt en ayant une série d'artères de différentes rigidités... tous ces problèmes inverses paraissent pertinents et ont des applications en médecine.

# Bibliographie

- [1] C. ABDALLAH, P. DORATO, J. BENITES-READ, AND R. BYRNE, *Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems*, 07 1993, pp. 3106 – 3107.
- [2] F. ABDALLAH, S. NICAISE, J. VALEIN, AND A. WEHBE, *Stability results for the approximation of weakly coupled wave equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 350 (2012), pp. 29–34.
- [3] ———, *Uniformly exponentially or polynomially stable approximations for second order evolution equations and some applications*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (2013), pp. 844–887.
- [4] B. AINSEBA AND M. IANNELLI, *Exact controllability of a nonlinear population-dynamics problem*, Differential Integral Equations, 16 (2003), pp. 1369–1384.
- [5] F. ALABAU, P. CANNARSA, AND V. KOMORNIK, *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*, J. Evol. Equ., 2 (2002), pp. 127–150.
- [6] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, Y. PRIVAT, AND E. TRÉLAT, *Nonlinear damped partial differential equations and their uniform discretizations*, J. Funct. Anal., 273 (2017), pp. 352–403.
- [7] K. AMMARI AND E. CRÉPEAU, *Feedback stabilization and boundary controllability of the Korteweg–de Vries equation on a star-shaped network*, SIAM J. Control Optim., 56 (2018), pp. 1620–1639.
- [8] K. AMMARI, M. JELLOULI, AND M. MEHRENBARGER, *Feedback stabilization of a coupled string-beam system*, Netw. Heterog. Media, 4 (2009), pp. 19–34.
- [9] K. AMMARI, D. MERCIER, V. RÉGNIER, AND J. VALEIN, *Spectral analysis and stabilization of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams and strings*, Commun. Pure Appl. Anal., 11 (2012), pp. 785–807.
- [10] K. AMMARI AND M. TUCSNAK, *Stabilization of second order evolution equations by a class of unbounded feedbacks*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 6 (2001), pp. 361–386.
- [11] W. ARENDT AND C. J. K. BATTY, *Tauberian theorems and stability of one-parameter semi-groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 306 (1988), pp. 837–852.
- [12] D. AUROUX, P. BANSART, AND J. BLUM, *An evolution of the back and forth nudging for geophysical data assimilation : application to Burgers equation and comparisons*, Inverse Probl. Sci. Eng., 21 (2013), pp. 399–419.
- [13] I. BABUŠKA AND J. OSBORN, *Eigenvalue problems*, in Handbook of numerical analysis, Vol. II, Handb. Numer. Anal., II, North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 641–787.
- [14] M. BADRA, *Stabilisation par feedback et approximation des équations de Navier-Stokes*, PhD thesis, 2006. Thèse de doctorat dirigée par Jean-Pierre Raymond, Mathématiques appliquées, Toulouse 3, 2006.
- [15] M. BADRA AND T. TAKAHASHI, *Stabilization of parabolic nonlinear systems with finite dimensional feedback or dynamical controllers : application to the Navier-Stokes system*, SIAM J. Control Optim., 49 (2011), pp. 420–463.

- [16] ———, *On the Fattorini criterion for approximate controllability and stabilizability of parabolic systems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 20 (2014), pp. 924–956.
- [17] C. BAIocchi, V. KOMORNIK, AND P. LORETI, *Ingham-Beurling type theorems with weakened gap conditions*, Acta Math. Hungar., 97 (2002), pp. 55–95.
- [18] J. M. BALL AND M. SLEMROD, *Feedback stabilization of distributed semilinear control systems*, Appl. Math. Optim., 5 (1979), pp. 169–179.
- [19] J. S. BARAS, A. BENSOUSSAN, AND M. R. JAMES, *Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters : special cases*, SIAM J. Appl. Math., 48 (1988), pp. 1147–1158.
- [20] V. BARBU AND R. TRIGGIANI, *Internal stabilization of Navier-Stokes equations with finite-dimensional controllers*, Indiana Univ. Math. J., 53 (2004), pp. 1443–1494.
- [21] A. BÁTKAI, K.-J. ENGEL, J. PRÜSS, AND R. SCHNAUBELT, *Polynomial stability of operator semigroups*, Math. Nachr., 279 (2006), pp. 1425–1440.
- [22] C. J. K. BATTY AND T. DUYCKAERTS, *Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces*, J. Evol. Equ., 8 (2008), pp. 765–780.
- [23] L. BAUDOUIN, E. CERPA, E. CRÉPEAU, AND A. MERCADO, *On the determination of the principal coefficient from boundary measurements in a KdV equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl., 22 (2014), pp. 819–845.
- [24] L. BAUDOUIN, E. CRÉPEAU, AND J. VALEIN, *Global Carleman estimate on a network for the wave equation and application to an inverse problem*, Math. Control Relat. Fields, 1 (2011), pp. 307–330.
- [25] ———, *Two approaches for the stabilization of nonlinear KdV equation with boundary time-delay feedback*, IEEE Trans. Automat. Control, 64 (2019), pp. 1403–1414.
- [26] L. BAUDOUIN, S. MARX, AND S. TARBOURIECH, *Event-triggered damping of a linear wave equation*, Joint 3rd IFAC Workshop on control of systems governed by PDEs, Oaxaca, Mexico (CPDE-CDPS 2019) (2019).
- [27] P. BÉGOUT AND F. SORIA, *A generalized interpolation inequality and its application to the stabilization of damped equations*, J. Differential Equations, 240 (2007), pp. 324–356.
- [28] A. BENABDALLAH, Y. DERMENJIAN, AND J. LE ROUSSEAU, *Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications to controllability and an inverse problem*, J. Math. Anal. Appl., 336 (2007), pp. 865–887.
- [29] L. BONIFACIUS, K. PIEPER, AND B. VEXLER, *Error estimates for space-time discretization of parabolic time-optimal control problems with bang-bang controls*, SIAM J. Control Optim., 57 (2019), pp. 1730–1756.
- [30] A. BORICHEV AND Y. TOMILOV, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*, Math. Ann., 347 (2010), pp. 455–478.
- [31] P. CANNARSA, P. MARTINEZ, AND J. VANCOSTENOBLE, *Carleman estimates for a class of degenerate parabolic operators*, SIAM J. Control Optim., 47 (2008), pp. 1–19.
- [32] C. CASTRO AND S. MICU, *Boundary controllability of a linear semi-discrete 1-D wave equation derived from a mixed finite element method*, Numer. Math., 102 (2006), pp. 413–462.
- [33] C. CASTRO, S. MICU, AND A. MÜNCH, *Numerical approximation of the boundary control for the wave equation with mixed finite elements in a square*, IMA J. Numer. Anal., 28 (2008), pp. 186–214.
- [34] M. CAVALCANTE, *The Korteweg–de Vries equation on a metric star graph*, Z. Angew. Math. Phys., 69 (2018), pp. Art. 124, 22.
- [35] T. CAZENAVE AND A. HARAUX, *An introduction to semilinear evolution equations*, vol. 13 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors.

- [36] E. CERPA, *Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain*, SIAM J. Control Optim., 46 (2007), pp. 877–899.
- [37] ———, *Control of a Korteweg-de Vries equation : a tutorial*, Math. Control Relat. Fields, 4 (2014), pp. 45–99.
- [38] E. CERPA AND E. CRÉPEAU, *Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 26 (2009), pp. 457–475.
- [39] E. CERPA, E. CRÉPEAU, AND C. MORENO, *On the boundary controllability of the korteweg-de vries equation on a star-shaped network*, IMA J. Math. Control Inform., 37 (2020), pp. 226–240.
- [40] E. CERPA, E. CRÉPEAU, AND J. VALEIN, *Boundary controllability of the korteweg-de vries equation on a tree-shaped network*, Evolution equations & Control Theory, 9 (2020), pp. 673–692.
- [41] W. L. CHAN AND B. Z. GUO, *On the semigroups of age-size dependent population dynamics with spatial diffusion*, Manuscripta Math., 66 (1989), pp. 161–181.
- [42] M. J. CHAPMAN AND A. J. PRITCHARD, *Finite-dimensional compensators for nonlinear infinite-dimensional systems*, in Control theory for distributed parameter systems and applications (Vorau, 1982), vol. 54 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, Berlin, 1983, pp. 60–76.
- [43] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [44] T. COLIN AND M. GISCLON, *An initial-boundary-value problem that approximate the quarter-plane problem for the Korteweg-de Vries equation*, Nonlinear Anal., 46 (2001), pp. 869–892.
- [45] D. COLTON AND R. KRESS, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, vol. 93 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1998.
- [46] J.-M. CORON AND E. CRÉPEAU, *Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 6 (2004), pp. 367–398.
- [47] J.-M. CORON AND E. TRÉLAT, *Global steady-state controllability of one-dimensional semi-linear heat equations*, SIAM J. Control Optim., 43 (2004), pp. 549–569 (electronic).
- [48] E. CRÉPEAU, *Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation with a piecewise constant main coefficient*, Systems Control Lett., 97 (2016), pp. 157–162.
- [49] E. CRÉPEAU AND M. SORINE, *A reduced model of pulsatile flow in an arterial compartment*, Chaos Solitons Fractals, 34 (2007), pp. 594–605.
- [50] M. CROUZEIX AND A. L. MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree], Masson, Paris, 1984.
- [51] C. CUSULIN AND L. GERARDO-GIORDA, *A numerical method for spatial diffusion in age-structured populations*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 26 (2010), pp. 253–273.
- [52] J. DAAFOUZ, M. TUCSNAK, AND J. VALEIN, *Well-posedness and stabilization of a class of infinite dimensional bilinear control systems*, IEEE Conference on Decision and Control (CDC’12), Maui (Hawaii), USA (2012), pp. 1560–1565.
- [53] ———, *Nonlinear control of a coupled PDE/ODE system modeling a switched power converter with a transmission line*, Systems Control Lett., 70 (2014), pp. 92–99.
- [54] R. DÁGER AND E. ZUAZUA, *Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures*, vol. 50 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], Springer-Verlag, Berlin, 2006.



- [55] R. DATKO, *Not all feedback stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delays in their feedbacks*, SIAM J. Control Optim., 26 (1988), pp. 697–713.
- [56] R. DATKO, J. LAGNESE, AND M. P. POLIS, *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations*, SIAM J. Control Optim., 24 (1986), pp. 152–156.
- [57] S. ERVEDOZA, *Spectral conditions for admissibility and observability of wave systems : applications to finite element schemes*, Numer. Math., 113 (2009), pp. 377–415.
- [58] ———, *Spectral conditions for admissibility and observability of Schrödinger systems : applications to finite element discretizations*, Asymptot. Anal., 71 (2011), pp. 1–32.
- [59] S. ERVEDOZA AND J. VALEIN, *On the observability of abstract time-discrete linear parabolic equations*, Rev. Mat. Complut., 23 (2010), pp. 163–190.
- [60] S. ERVEDOZA AND E. ZUAZUA, *Uniformly exponentially stable approximations for a class of damped systems*, J. Math. Pures Appl. (9), 91 (2009), pp. 20–48.
- [61] ———, *The wave equation : control and numerics*, in Control of partial differential equations, vol. 2048 of Lecture Notes in Math., Springer, Heidelberg, 2012, pp. 245–339.
- [62] E. FERNÁNDEZ-CARA AND S. GUERRERO, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006), pp. 1399–1446.
- [63] E. FERNÁNDEZ-CARA, S. GUERRERO, O. Y. IMANUVILOV, AND J.-P. PUEL, *Local exact controllability of the Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl. (9), 83 (2004), pp. 1501–1542.
- [64] E. FRIDMAN, S. NICAISE, AND J. VALEIN, *Stabilization of second order evolution equations with unbounded feedback with time-dependent delay*, SIAM J. Control Optim., 48 (2010), pp. 5028–5052.
- [65] A. V. FURSIKOV AND O. Y. IMANUVILOV, *Controllability of evolution equations*, vol. 34 of Lecture Notes Series, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [66] O. GLASS AND S. GUERRERO, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit*, Asymptot. Anal., 60 (2008), pp. 61–100.
- [67] R. GLOWINSKI, *Ensuring well-posedness by analogy : Stokes problem and boundary control for the wave equation*, J. Comput. Phys., 103 (1992), pp. 189–221.
- [68] R. GLOWINSKI, C. H. LI, AND J.-L. LIONS, *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. I. Dirichlet controls : description of the numerical methods*, Japan J. Appl. Math., 7 (1990), pp. 1–76.
- [69] R. GRIMSHAW, E. PELINOVSKY, AND T. TALIPOVA, *The modified korteweg-de vries equation in the theory of large-amplitude internal waves*, Nonlinear Processes Geophys., 4 (1997), pp. 237–250.
- [70] B. Z. GUO AND W. L. CHAN, *On the semigroup for age dependent population dynamics with spatial diffusion*, J. Math. Anal. Appl., 184 (1994), pp. 190–199.
- [71] G. HAINE AND K. RAMDANI, *Reconstructing initial data using observers : error analysis of the semi-discrete and fully discrete approximations*, Numer. Math., 120 (2012), pp. 307–343.
- [72] N. HGOBURU AND S. ANIȚA, *Null controllability via comparison results for nonlinear age-structured population dynamics*, Math. Control Signals Systems, 31 (2019), pp. Art. 2, 38.
- [73] Z. HIDAYAT, R. BABUSKA, B. DE SCHUTTER, AND A. NUNEZ, *Observers for linear distributed-parameter systems : A survey*, in Robotic and Sensors Environments (ROSE), 2011 IEEE International Symposium on, sept. 2011, pp. 166–171.

- [74] W. HUYER, *Semigroup formulation and approximation of a linear age-dependent population problem with spatial diffusion*, Semigroup Forum, 49 (1994), pp. 99–114.
- [75] L. I. IGNAT, A. F. PAZOTO, AND L. ROSIER, *Inverse problem for the heat equation and the Schrödinger equation on a tree*, Inverse Problems, 28 (2012), pp. 015011, 30.
- [76] O. Y. IMANUVILOV AND M. YAMAMOTO, *Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 39 (2003), pp. 227–274.
- [77] J. A. INFANTE AND E. ZUAZUA, *Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 33 (1999), pp. 407–438.
- [78] A. E. INGHAM, *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series*, Math. Z., 41 (1936), pp. 367–379.
- [79] K. ITO AND F. KAPPEL, *The Trotter-Kato theorem and approximation of PDEs*, Math. Comp., 67 (1998), pp. 21–44.
- [80] M. R. JAMES AND J. S. BARAS, *An observer design for nonlinear control systems*, in Analysis and optimization of systems (Antibes, 1988), vol. 111 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, Berlin, 1988, pp. 170–180.
- [81] T. KATO, *Nonlinear semigroups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), pp. 508–520.
- [82] ———, *Linear evolution equations of “hyperbolic” type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 17 (1970), pp. 241–258.
- [83] T. KATO, *Abstract differential equations and nonlinear mixed problems*, Lezioni Fermiane. [Fermi Lectures], Scuola Normale Superiore, Pisa ; Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1985.
- [84] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [85] G. KNOWLES, *Finite element approximation of parabolic time optimal control problems*, SIAM J. Control Optim., 20 (1982), pp. 414–427.
- [86] G. KREISSELMEIER, *Adaptive observers with exponential rate of convergence*, IEEE Trans. Automatic Control, AC-22 (1977), pp. 2–8.
- [87] ———, *The generation of adaptive law structures for globally convergent adaptive observers*, IEEE Trans. Automatic Control, AC-24 (1979), pp. 510–513.
- [88] S. LABBÉ AND E. TRÉLAT, *Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems*, Systems Control Lett., 55 (2006), pp. 597–609.
- [89] J. E. LAGNESE, G. LEUGERING, AND E. J. P. G. SCHMIDT, *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [90] I. LASIECKA, *Galerkin approximations of abstract parabolic boundary value problems with rough boundary data— $L_p$  theory*, Math. Comp., 47 (1986), pp. 55–75.
- [91] I. LASIECKA AND R. TRIGGIANI, *Control theory for partial differential equations : continuous and approximation theories. I*, vol. 74 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Abstract parabolic systems.
- [92] G. LEBEAU AND L. ROBBIANO, *Contrôle exact de l’équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995), pp. 335–356.
- [93] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

- [94] J.-L. LIONS AND E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. II*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 182.
- [95] Z. LIU AND B. RAO, *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation*, Z. Angew. Math. Phys., 56 (2005), pp. 630–644.
- [96] Z. LIU AND S. ZHENG, *Semigroups associated with dissipative systems*, vol. 398 of Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [97] H. LOGEMANN, R. REBARBER, AND G. WEISS, *Conditions for robustness and nonrobustness of the stability of feedback systems with respect to small delays in the feedback loop*, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 572–600.
- [98] A. LOPEZ AND E. ZUAZUA, *Some new results related to the null controllability of the 1-d heat equation*, in Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1997–1998, École Polytech., Palaiseau, 1998, pp. Exp. No. VIII, 22.
- [99] D. LUENBERGER, *Observing the state of a linear system*, IEEE Trans. Mil. Electron., MIL-8 (1964), pp. 74–80.
- [100] G. LUMER, *Connecting of local operators and evolution equations on networks*, in Potential theory, Copenhagen 1979 (Proc. Colloq., Copenhagen, 1979), vol. 787 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1980, pp. 219–234.
- [101] S. MICU, I. ROVENTA, AND M. TUCSNAK, *Time optimal boundary controls for the heat equation*, J. Funct. Anal., 263 (2012), pp. 25–49.
- [102] P. MOIREAU, D. CHAPPELLE, AND P. LE TALLEC, *Filtering for distributed mechanical systems using position measurements : perspectives in medical imaging*, Inverse Problems, 25 (2009), pp. 035010, 25.
- [103] D. MUGNOLO, D. NOJA, AND C. SEIFERT, *Airy-type evolution equations on star graphs*, Anal. PDE, 11 (2018), pp. 1625–1652.
- [104] S. NICAISE, *Diffusion sur les espaces ramifiés*, 1986. Thèse de Doctorat, Université de Mons.
- [105] S. NICAISE AND C. PIGNOTTI, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006), pp. 1561–1585.
- [106] ———, *Stabilization of second-order evolution equations with time delay*, Math. Control Signals Systems, 26 (2014), pp. 563–588.
- [107] S. NICAISE, C. PIGNOTTI, AND J. VALEIN, *Exponential stability of the wave equation with boundary time-varying delay*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 4 (2011), pp. 693–722.
- [108] S. NICAISE AND S.-E. REBIAI, *Stabilization of the Schrödinger equation with a delay term in boundary feedback or internal feedback*, Port. Math., 68 (2011), pp. 19–39.
- [109] S. NICAISE AND J. VALEIN, *Stabilization of the wave equation on 1-D networks with a delay term in the nodal feedbacks*, Netw. Heterog. Media, 2 (2007), pp. 425–479.
- [110] ———, *Stabilization of second order evolution equations with unbounded feedback with delay*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 16 (2010), pp. 420–456.
- [111] S. NICAISE, J. VALEIN, AND E. FRIDMAN, *Stability of the heat and of the wave equations with boundary time-varying delays*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 2 (2009), pp. 559–581.
- [112] W. PAULSEN, *The exterior matrix method for sequentially coupled fourth-order equations*, J. of Sound and Vibration, 208 (2007), pp. 132–163.
- [113] A. F. PAZOTO, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 11 (2005), pp. 473–486.

- [114] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [115] A. PERASSO AND U. RAZAFISON, *Identifiability problem for recovering the mortality rate in an age-structured population dynamics model*, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 24 (2016), pp. 711–728.
- [116] G. PERLA MENZALA, C. F. VASCONCELLOS, AND E. ZUAZUA, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, *Quart. Appl. Math.*, 60 (2002), pp. 111–129.
- [117] O. POISSON, *Uniqueness and Hölder stability of discontinuous diffusion coefficients in three related inverse problems for the heat equation*, *Inverse Problems*, 24 (2008), pp. 025012, 32.
- [118] K. RAMDANI, T. TAKAHASHI, AND M. TUCSNAK, *Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations—application to LQR problems*, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 13 (2007), pp. 503–527.
- [119] K. RAMDANI, M. TUCSNAK, AND J. VALEIN, *Detectability and state estimation for linear age-structured population diffusion models*, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 50 (2016), pp. 1731–1761.
- [120] K. RAMDANI, M. TUCSNAK, AND G. WEISS, *Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers*, *Automatica*, 46 (2010), pp. 1616–1625.
- [121] K. RAMDANI, J. VALEIN, AND J.-C. VIVALDA, *Adaptive observer for age-structured population with spatial diffusion*, *North-West. Eur. J. Math.*, 4 (2018), pp. 39–58, i.
- [122] J.-P. RAYMOND AND L. THEVENET, *Boundary feedback stabilization of the two dimensional Navier-Stokes equations with finite dimensional controllers*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 27 (2010), pp. 1159–1187.
- [123] R. REBARBER AND S. TOWNLEY, *Robustness with respect to delays for exponential stability of distributed parameter systems*, *SIAM J. Control Optim.*, 37 (1999), pp. 230–244.
- [124] L. ROSIER, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2 (1997), pp. 33–55.
- [125] L. ROSIER AND B.-Y. ZHANG, *Control and stabilization of the Korteweg-de Vries equation : recent progresses*, *J. Syst. Sci. Complex.*, 22 (2009), pp. 647–682.
- [126] D. L. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions*, *SIAM Rev.*, 20 (1978), pp. 639–739.
- [127] J.-C. SAUT AND B. SCHEURER, *Unique continuation for some evolution equations*, *J. Differential Equations*, 66 (1987), pp. 118–139.
- [128] J. SIMON, *Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$* , *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 146 (1987), pp. 65–96.
- [129] M. SLEMROD, *Feedback stabilization of a linear control system in Hilbert space with an a priori bounded control*, *Math. Control Signals Systems*, 2 (1989), pp. 265–285.
- [130] L. R. TCHEUGOUÉ TÉBOU AND E. ZUAZUA, *Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity*, *Numer. Math.*, 95 (2003), pp. 563–598.
- [131] R. TRIGGIANI, *On the stabilizability problem in Banach space*, *J. Math. Anal. Appl.*, 52 (1975), pp. 383–403.
- [132] ———, *Addendum : “On the stabilizability problem in Banach space”* (*J. Math. Anal. Appl.* 52 (1975), no. 3, 383–403), *J. Math. Anal. Appl.*, 56 (1976), pp. 492–493.
- [133] M. TUCSNAK, J. VALEIN, AND C.-T. WU, *Numerical approximation of some time optimal control problems*, *European Control Conference (ECC)*, (2015), pp. 1339–1342.
- [134] ———, *Finite dimensional approximations for a class of infinite dimensional time optimal control problems*, *Internat. J. Control*, 92 (2019), pp. 132–144.

- [135] M. TUCSNAK AND G. WEISS, *Observation and control for operator semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks], Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [136] J. VALEIN, *On the asymptotic stability of the korteweg-de vries equation with time-delayed internal feedback*, to appear in Math. Control Relat. Fields, special issue on "Stability and control on infinite dimensional systems", (2020).
- [137] J. VALEIN AND E. ZUAZUA, *Stabilization of the wave equation on 1-D networks*, SIAM J. Control Optim., 48 (2009), pp. 2771–2797.
- [138] J. VANCOSTENOBLE AND E. ZUAZUA, *Null controllability for the heat equation with singular inverse-square potentials*, J. Funct. Anal., 254 (2008), pp. 1864–1902.
- [139] J. VON BELOW, *A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on  $c^2$ -networks*, Linear Algebra Appl., 71 (1985), pp. 309–325.
- [140] G. WANG AND L. WANG, *Finite element approximations of optimal controls for the heat equation with end-point state constraints*, Int. J. Numer. Anal. Model., 9 (2012), pp. 844–875.
- [141] G. WANG AND G. ZHENG, *An approach to the optimal time for a time optimal control problem of an internally controlled heat equation*, SIAM J. Control Optim., 50 (2012), pp. 601–628.
- [142] G. WEISS, *Admissibility of unbounded control operators*, SIAM J. Control Optim., 27 (1989), pp. 527–545.
- [143] J. ZABCZYK, *Remarks on the algebraic Riccati equation in Hilbert space*, Appl. Math. Optim., 2 (1975/76), pp. 251–258.
- [144] B. Y. ZHANG, *Boundary stabilization of the Korteweg-de Vries equation*, in Control and estimation of distributed parameter systems : nonlinear phenomena (Vorau, 1993), vol. 118 of Internat. Ser. Numer. Math., Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 371–389.
- [145] Q. ZHANG, *Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 47 (2002), pp. 525–529.
- [146] C. ZHENG, *Controllability of the time discrete heat equation*, Asymptot. Anal., 59 (2008), pp. 139–177.
- [147] E. ZUAZUA, *Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations*, vol. 8, 2002, pp. 469–513. Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999).
- [148] ———, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods*, SIAM Rev., 47 (2005), pp. 197–243.